

BACHELORARBEIT

eingereicht an der
Fakultät für Physik
der
Ludwig–Maximilians–Universität München

TRANSPORTPHÄNOMENE IN KALTEN FERMIGASEN

TRANSPORT PHENOMENA IN COLD FERMI GASES

Sebastian Stemmer

Betreuerin:

Dr. Olga Goulko

26. Juli 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Das physikalische System	3
3	Statistische Beschreibung physikalischer Systeme	4
3.1	Verteilungsfunktion und Boltzmann-Gleichung	4
3.2	Stöße	5
3.2.1	Allgemeine statistische Betrachtung	5
3.2.2	Zwei-Teilchen-Stöße - Erhaltungssätze und statistische Beschreibung	6
3.2.3	Die allgemeine Form des Stoßterms	9
3.3	System ohne äußere Kraft - Maxwell-Boltzmann-Verteilung und Streurrate	10
4	Nichtgleichgewichtszustände und Transportkoeffizienten	11
4.1	Transportvorgänge, Relaxationszeit-Näherung und Linear Response	11
4.2	Der Spin-Drag	12
4.2.1	Kraft im ganzen System	12
4.2.2	Bilanzgleichung und nicht-stationärer Zustand	15
4.2.3	Temperatur im System	16
4.3	Die Scherviskosität	18
4.3.1	System mit klassischen Teilchen	18
4.3.2	Der Impulsfluss	19
4.3.3	Das lokale Gleichgewicht	20
4.3.4	Die Bahnintegralmethode	20
4.3.5	Berechnung der Scherviskosität	22
4.4	Die Spin-Scherviskosität	25
4.4.1	Mikroskopische Betrachtung und die Zerfallslänge	25
4.4.2	Impulsfluss und Spin-Scherviskosität	27
5	Numerische Analyse	28
5.1	Die Computersimulation - Grundlagen und Aufbau	28
5.1.1	Verteilungsfunktion und Testteilchen	28
5.1.2	Zeitentwicklung und Stöße	28
5.1.3	Bestimmung des Zeitschritts	29
5.1.4	Einheiten in numerischen Systemen	30
5.2	Bestimmung des Spin-Drags	30
5.2.1	Vorgehensweise	30
5.2.2	Temperaturabhängigkeit des Spin-Drags	33
5.2.3	Abhängigkeit des Spin-Drags von der mittleren Stoßzeit	35
5.2.4	Fazit	36
5.3	Numerische Analyse des Systems mit Kraftschicht	36
5.3.1	Erweiterung der Simulation um die Kraftschicht	36
5.3.2	Vorgehensweise	38
5.3.3	Abhängigkeit der Zerfallslänge von der mittleren Stoßzeit	42
5.3.4	Temperaturabhängigkeit der Zerfallslänge	43
5.3.5	Fazit	45
6	Schluss	46
	Literaturverzeichnis	47

1 Einleitung

Fermionische Vielteilchensysteme existieren in der Natur in unterschiedlichen Formen. Neben metallischen Festkörpern und Halbleitern lassen sich auch weiße Zwerge und Neutronensterne durch fermionische Systeme beschreiben. Die Untersuchung verdünnter fermionischer Systeme bei niedrigen Temperaturen ist von besonderem Interesse. Aufgrund der geringen Dichte lassen sich solche Systeme hinsichtlich der Temperatur und der Stärke der Wechselwirkung experimentell ausgezeichnet kontrollieren [2, S. 8]. Bei niedrigen Temperaturen im Bereich der Fermi-Temperatur können quantenmechanische Phänomene beobachtet werden. Insbesondere zeigt sich für diese Temperaturbereiche eine fundamentale Eigenschaft von Fermionen - das Pauli-Prinzip.

Typischerweise betrachtet man im Experiment Systeme mit Teilchendichten im Bereich von 10^{13} bis 10^{15} cm^{-3} . Um für diese Teilchendichten quantenmechanische Phänomene beobachten zu können, sind Temperaturen unter 10^{-5} K notwendig [2, S. 8]. Nachdem 1999 erste Erfolge bei der Realisierung solcher fermionischer Systeme mit Hilfe von ^{40}K -Atomen erzielt wurden, konnten quantenmechanische Phänomene 2001 in fermionischen Gasen aus ^6Li -Atomen beobachtet werden [1]. Kalte verdünnte Fermigase sind somit ein äußerst junges Forschungsgebiet, dessen experimenteller Zugang aufgrund der notwendigen niedrigen Temperaturen äußerst schwierig ist. Es ist daher sinnvoll, solche Systeme numerisch innerhalb einer Computersimulation zu beschreiben.

Da sich in der Natur vorkommende Systeme, welche durch verdünnte kalte Fermigase beschreibbar sind, nicht immer im Gleichgewicht befinden, ist es interessant, Nichtgleichgewichtszustände in solchen Systemen zu untersuchen. Dabei können physikalische Größen wie der Impuls, die Teilchenzahl oder die Energie im System transportiert werden.

Deshalb beschäftigt sich die vorliegende Arbeit einerseits mit der Theorie von Transportprozessen in zweikomponentigen verdünnten Fermigasen bei niedrigen Temperaturen, welche sich in Nichtgleichgewichtszuständen befinden. Dazu wird in Kapitel 2 ein physikalisches System beschrieben, in welchem Transportprozesse auftreten. In Kapitel 3 erfolgt eine allgemeine physikalische Beschreibung von statistischen Systemen und damit von Nichtgleichgewichtszuständen und Transportprozessen. Dabei wird die Boltzmann-Gleichung hergeleitet, welche die Grundlage dieser Beschreibung darstellt.

Die im zu beschreibenden System auftretenden Transportprozesse werden in Kapitel 4 genauer betrachtet. Das System wird dabei in unterschiedlichen Varianten untersucht, wobei unterschiedliche Transportprozesse eine tragende Rolle spielen. Dabei wird es vor allem um die Herleitung sogenannter Transportkoeffizienten gehen. Dies sind Größen, welche die grundlegenden physikalischen Eigenschaften von Transportprozessen charakterisieren. Insbesondere werden die Transportkoeffizienten Spin-Drag und Scherviskosität behandelt, welche den Transport von Teilchen und Impuls beschreiben.

Alle Variationen des zu beschreibenden Systems werden sich aufgrund einer geringfügigen Störung durch eine äußere Kraft in einem Nichtgleichgewichtszustand befinden. Dadurch wird sich die Beschreibung der Transportprozesse auf lineare Gleichungen vereinfachen.

Andererseits erfolgt aufgrund der schwierigen experimentellen Realisierbarkeit solcher Systeme in Kapitel 5 dieser Arbeit eine numerische Analyse zweier Varianten des zu beschreibenden Systems mit einer Computersimulation. Dabei wurde eine bereits vorhandene Simulation von mir erweitert, um diese Analyse durchzuführen. Zuerst wird die Abhängigkeit des Spin-Drags von der mittleren Stoßzeit und der Temperatur untersucht. Anschließend erfolgt eine numerische Betrachtung des Transportprozesses, welcher durch die Scherviskosität beschrieben wird.

Während der gesamten Arbeit werden Einheiten verwendet, in denen $\hbar = k_B = 1$ gilt. Sind in einer Rechnung keine Integrationsgrenzen angegeben, wird über den kompletten physikalisch sinnvollen Raum integriert. Der Ausdruck „x-Koordinate der Geschwindigkeit“ bzw. „x-Koordinate des Impulses“ wird in der gesamten Arbeit durch die Kurzform „x-Geschwindigkeit“ bzw. „x-Impuls“ notiert.

2 Das physikalische System

Wir betrachten einen kubischen Kasten der Kantenlänge L . In diesem befindet sich ein verdünntes Gas, bestehend aus $N = 10000$ Fermionen. Für die Masse m dieser Fermionen gilt $m = 1$ [Masseneinheit].

Hinsichtlich der Spinkomponente in z -Richtung gibt es unter den Fermionen zwei Teilchensorten s . Davon bezeichnen wir eine mit "Spin Up" und die andere mit "Spin Down". Für Teilchen mit "Spin Up" gilt $s = \uparrow$ und für Teilchen mit "Spin down" $s = \downarrow$. In einer Rechnung gilt die Identifikation

$$s = \uparrow \triangleq s = 1 \text{ und } s = \downarrow \triangleq s = -1. \quad (2.1)$$

Außerdem bezeichnet \bar{s} die zu s gegensätzliche Teilchensorte. Unter den N Fermionen befinden sich $N_{\uparrow} = \frac{N}{2} = 5000$ mit $s = \uparrow$ und $N_{\downarrow} = \frac{N}{2} = 5000$ mit $s = \downarrow$.

Die Randbedingungen des Kastens sind periodisch, d. h. Teilchen einer bestimmten Geschwindigkeit durchdringen die Wände des Kastens und treten an der gegenüberliegenden Wand mit der selben Geschwindigkeit wieder in das System ein. Für die Ortskoordinate \mathbf{x} eines jeden Teilchens gilt durch den kubischen Kasten

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \text{ mit } x, y, z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \quad (2.2)$$

und durch die periodischen Randbedingungen

$$(x + L, y, z) = (x, y, z), (x, y + L, z) = (x, y, z), (x, y, z + L) = (x, y, z). \quad (2.3)$$

Dabei haben wir das Koordinatensystem so gewählt, dass sich dessen Ursprung in der Mitte des Kastens befindet und dass dessen Koordinatenachsen senkrecht auf den Wänden des Kastens stehen (siehe Abbildung 1).

Um die x - y -Ebene befindet sich eine sogenannte Kraftschicht der Dicke d , in der eine konstante Kraft mit Betrag F_0 in positive x -Richtung auf Teilchen mit $s = \uparrow$ und in negative x -Richtung auf Teilchen mit $s = \downarrow$ wirkt. Der übrige Kasten ist kräftefrei. Für die Kraft auf ein Teilchen mit Spin s gilt folglich

$$\mathbf{F}_s = \begin{cases} (sF_0, 0, 0) & \text{für } z \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.4)$$

Die Dichte n des Gases sei homogen und gering genug, dass die Zeit in der Teilchen während eines Stoßes wechselwirken viel kleiner als die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen ist. Dadurch ist die Wahrscheinlichkeit für Stöße zwischen mehr als zwei Teilchen so gering, dass diese vernachlässigt werden können [8, S. 445]. Außerdem sind alle Stoßprozesse im System elastisch. In der ganzen Arbeit setzen wir $n = 1$ [$\frac{1}{\text{Volumeneinheit}}$].

Zusätzlich setzen wir voraus, dass die thermische de-Broglie-Wellenlänge viel kleiner als der mittlere Abstand zwischen den Teilchen ist. Die Bewegung der Teilchen kann dann zwischen den Stößen durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen beschrieben werden [6, S. 543]. Der Stoßprozess elastischer Zwei-Teilchen-Stöße wird hingegen durch den quantenmechanischen differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ beschrieben.

Wir nehmen an, dass die Temperatur des Systems hoch genug ist, um den fermionischen Effekt des Pauli-Blockings [2, S. 81 f.] zu vernachlässigen. Die Temperatur des Systems soll aber trotzdem klein genug sein, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt für Fermionen in der Näherung kleiner Energien angewendet werden kann. Dieser verschwindet für einen Stoßprozess zwischen zwei Teilchen gleicher Teilchensorte, d. h. es stoßen ausschließlich Teilchen unterschiedlicher Teilchensorte.

Vernachlässigt man relativistische Effekte hinsichtlich der Spin-Wechselwirkung, gilt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}}. \quad (2.5)$$

Dabei ist \mathbf{V} die Relativgeschwindigkeit der stoßenden Teilchen. Der Parameter a wird als Streulänge bezeichnet und gibt die Stärke der Wechselwirkung an [2, S. 9 ff.]. Dadurch gilt für den totalen Wirkungsquerschnitt σ

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi a^2}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}}. \quad (2.6)$$

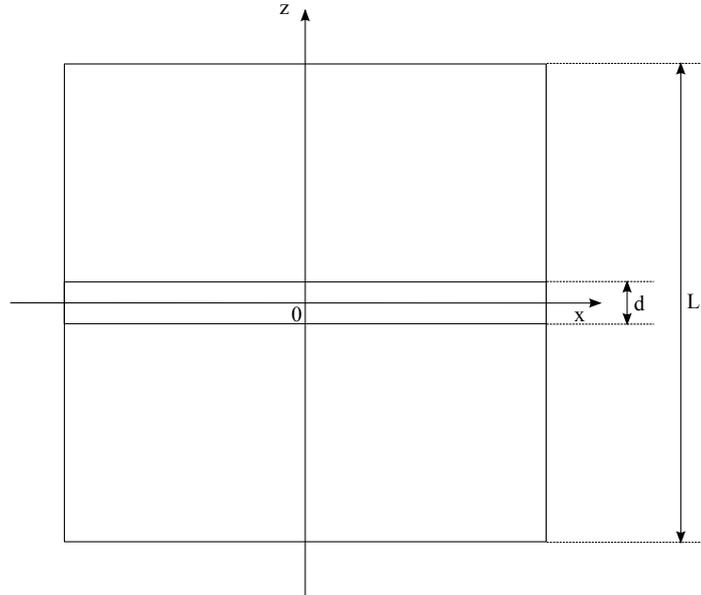


Abbildung 1: Kubischer Kasten mit Kraftschicht - Schnitt durch die x-z-Ebene

Aufgrund der großen Teilchenzahl N ist nur eine statistische Beschreibung des Systems zielführend. Die Grundlagen dieser werden im folgenden Kapitel erläutert.

3 Statistische Beschreibung physikalischer Systeme

3.1 Verteilungsfunktion und Boltzmann-Gleichung

Wir legen zu Beginn zunächst eine wichtige Definition fest, die uns die statistische Beschreibung physikalischer Systeme ermöglicht.

Definition 1 Die Anzahl der Teilchen mit Spin s , deren Ort sich zur Zeit t im Volumenelement d^3x um \mathbf{x} und deren Geschwindigkeit sich in der Umgebung d^3v um \mathbf{v} befindet, wird mit $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v$ notiert. $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ bezeichnet man als Verteilungsfunktion des Systems [6, S. 580].

Die Verteilungsfunktion ist folglich normiert:

$$\int d^3x d^3v f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = N_s \quad (3.1)$$

Wir wollen nun eine Gleichung herleiten, die das Verhalten eines allgemeinen statistischen Systems beschreibt. Dazu betrachten wir Teilchen der Teilchensorte s , welche sich zur Zeit t im Volumenelement d^3x um \mathbf{x} und im Geschwindigkeitsbereich d^3v um \mathbf{v} befinden. Auf diese wirke von außerhalb des Systems eine Kraft $F_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Ist die Bewegung dieser Teilchen stoßfrei, befinden sie sich alle zum Zeitpunkt $t' := t + dt$ im Volumenelement d^3x' um \mathbf{x}' und im Geschwindigkeitsbereich d^3v' um \mathbf{v}' . Folglich gilt mit Definition 1

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v = f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d^3x' d^3v'. \quad (3.2)$$

Die stoßfreie Bewegung der Teilchen im Zeitintervall dt wird durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}dt \text{ und } \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)dt$$

beschrieben. Aufgrund des Liouvilleschen Satzes (siehe [4, S. 179 ff.]) ist das Phasenraumvolumen während der stoßfreien Bewegung der Teilchen erhalten, d. h.

$$d^3x d^3v = d^3x' d^3v'. \quad (3.3)$$

Es gilt folglich

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v = f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d^3x' d^3v'. \quad (3.4)$$

Berücksichtigt man Stöße, gilt diese Gleichheit nicht mehr, da Teilchen mit Spin s im Zeitintervall $[t, t + dt]$ in die betrachtete Umgebung hinein bzw. aus dieser heraus gestoßen werden. Um trotzdem eine Bilanzgleichung aufstellen zu können, definiert man einen Stoßterm.

Definition 2 Der Stoßterm

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St} dt d^3x d^3v \quad (3.5)$$

beschreibt die Zahl der Teilchen mit Spin s , welche im Zeitintervall $[t, t + dt]$ in die Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) hinein ($\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St} > 0$) bzw. aus dieser heraus ($\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St} < 0$) gestoßen werden [8, S. 447 f.].

Unter Verwendung dieser Definition kann man die Gleichung (3.4) erweitern und dadurch Stöße berücksichtigen :

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v + \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St} dt d^3x d^3v = f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d^3x' d^3v' \quad (3.6)$$

Entwickelt man die Verteilungsfunktion in dt erhält man die Relation

$$\frac{f_s(\mathbf{x} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)dt, t + dt) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} + \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{F}_s + \frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{df_s}{dt} \quad (3.7)$$

und dadurch die sogenannte Boltzmann-Gleichung

$$\frac{df_s}{dt} = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St}. \quad (3.8)$$

Durch diese Differentialgleichung kann man, soweit dies analytisch möglich ist, $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ berechnen und dadurch ein allgemeines statistisches System beschreiben. Dazu benötigt man allerdings einen Ausdruck für den Stoßterm [6, S. 587].

Nach einer allgemeine Betrachtung von Stößen, die später von Nutzen sein wird, geht es deshalb um die Form des Stoßterms.

3.2 Stöße

3.2.1 Allgemeine statistische Betrachtung

Die in diesem Abschnitt dargestellte Theorie samt Herleitungen und Definitionen orientiert sich an [6, Kapitel 12].

Wir betrachten ein Teilchen T in einem Gas. Um die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes von T mit einem anderen Teilchen beschreiben zu können, werden folgende Definitionen festgelegt.

Definition 3 Das Teilchen T sei zuletzt zum Zeitpunkt t_0 mit einem anderen Teilchen zusammengestoßen. Die Wahrscheinlichkeit, dass T zum Zeitpunkt $t > t_0$ mit noch keinem anderen Teilchen zusammengestoßen ist, hängt von $\Delta t := t - t_0$ ab und wird mit $P(t - t_0)$ bezeichnet.

Aus der Definition folgt, dass

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(t - t_0) = 1 \quad (3.9)$$

gilt, da in der unendlich kleinen Zeitspanne $\Delta t \rightarrow 0$ noch kein weiterer Stoß stattgefunden haben kann. Irgendwann stößt das Teilchen auf jeden Fall, d. h. $P(t - t_0)$ nimmt mit steigendem t immer weiter ab, insbesondere gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t - t_0) = 0. \quad (3.10)$$

Definition 4 Die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen T mit einem anderen Teilchen in der Zeitspanne dt zusammenstößt wird mit $w dt$ bezeichnet, wobei $w > 0$ gilt. Die sogenannte Stoßrate w gibt die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß des Teilchens T in der Zeiteinheit dt an.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass T im Zeitintervall dt nicht stößt, durch $1 - w dt$ gegeben. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit $w dt$ unabhängig von der Vorgeschichte des Teilchens ist. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen T zur Zeit $t + dt$ noch nicht gestoßen hat, durch

$$P(t - t_0)(1 - w dt) \quad (3.11)$$

ausgedrückt werden. Diese muss nach Definition 3 äquivalent mit $P(t + dt - t_0)$ sein, d. h.

$$P(t + dt - t_0) = P(t - t_0)(1 - w dt). \quad (3.12)$$

Der Ausdruck führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{P(t + dt - t_0) - P(t - t_0)}{dt} = \frac{dP(t - t_0)}{dt} = -P(t - t_0)w. \quad (3.13)$$

Nehmen wir an dass w zeitunabhängig ist, gilt für die Lösung der hergeleiteten Differentialgleichung mit (3.9)

$$P(t - t_0) = e^{-w(t-t_0)}. \quad (3.14)$$

Die Wahrscheinlichkeit $\tilde{P}(t - t_0)dt$, dass ein Teilchen, welches zur Zeit t_0 zuletzt gestoßen hat, im Zeitintervall $[t, t + dt]$ stößt, ist durch

$$\tilde{P}(t - t_0)dt = P(t - t_0)w dt \quad (3.15)$$

gegeben.

Definition 5 Hat ein Teilchen zuletzt zum Zeitpunkt t_0 gestoßen, wird der Erwartungswert der Zeitspanne bis zum nächsten Stoß als mittlere Stoßzeit τ bezeichnet. Diese ist also die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen.

Aus dieser Definition und der Gleichung (3.15) folgt

$$\tau = \int_{t_0}^{\infty} dt P(t - t_0)w t = \frac{1}{w}. \quad (3.16)$$

Durch die mikroskopische Betrachtung eines Zwei-Teilchen-Stoßes im nächsten Abschnitt leiten wir eine Formel her, mit der die Form des Stoßterms bestimmt werden kann.

3.2.2 Zwei-Teilchen-Stöße - Erhaltungssätze und statistische Beschreibung

Wir betrachten im Folgenden einen Stoß zwischen zwei Teilchen unterschiedlicher Teilchensorte, da der differentielle Wirkungsquerschnitt für den Stoß zweier Teilchen gleicher Teilchensorte verschwindet.

Das Teilchen mit Spin s - wir nennen es Teilchen A - habe vor dem Stoß die Geschwindigkeit \mathbf{v} und nach dem Stoß die Geschwindigkeit \mathbf{v}'_1 . Wir bezeichnen das Teilchen mit Spin \bar{s} als Teilchen B. Seine Geschwindigkeit sei vor dem Stoß \mathbf{v}_2 und nach dem Stoß \mathbf{v}'_2 .

Aus der Gesamtimpulserhaltung folgt unmittelbar, dass die Schwerpunktschwindigkeit $\dot{\mathbf{S}}$ der Teilchen vor bzw. die Schwerpunktschwindigkeit $\dot{\mathbf{S}}'$ der Teilchen nach dem Stoß

$$\dot{\mathbf{S}} := \frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}_2}{2} = \frac{\mathbf{P}_{\text{ges}}}{2} \text{ bzw. } \dot{\mathbf{S}}' := \frac{\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2}{2} = \frac{\mathbf{P}'_{\text{ges}}}{2} \quad (3.17)$$

äquivalent ist, d. h.

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}}'. \quad (3.18)$$

Da wir nur elastische Stöße betrachten, ist auch die gesamte kinetische Energie erhalten, d. h.

$$\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}'_1{}^2 + \mathbf{v}'_2{}^2. \quad (3.19)$$

Definiert man die Relativgeschwindigkeit der Teilchen vor bzw. nach dem Stoß in Form

$$\mathbf{V} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_2 \text{ bzw. } \mathbf{V}' := \mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2, \quad (3.20)$$

kann man die Erhaltung der gesamten kinetischen Energie durch

$$\frac{1}{2}\mathbf{V}^2 + 2\dot{\mathbf{S}}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{V}'^2 + 2\dot{\mathbf{S}}'^2 \quad (3.21)$$

ausdrücken. Mit (3.18) folgt daraus die Erhaltung des Relativgeschwindigkeitsbetrags

$$|\mathbf{V}| = |\mathbf{V}'|. \quad (3.22)$$

\mathbf{V}' geht folglich durch Drehung des Vektors \mathbf{V} um dessen Fußpunkt hervor. Wir stellen die Richtung von \mathbf{V}' bezogen auf \mathbf{V} durch die Winkel θ und φ dar (siehe Abb. 2).

Neben der Beschreibung des Stoßes durch die Geschwindigkeiten der Teilchen A und B vor und nach dem Stoß ist auch eine Beschreibung durch die Freiheitsgrade

$$\left(\dot{\mathbf{S}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{S}}', \mathbf{v}' \right) \quad (3.23)$$

möglich, da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{S}} + \frac{1}{2}\mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{2}\mathbf{V}, \quad \mathbf{v}'_1 = \dot{\mathbf{S}}' + \frac{1}{2}\mathbf{V}' \text{ und } \mathbf{v}'_2 = \dot{\mathbf{S}}' - \frac{1}{2}\mathbf{V}' \quad (3.24)$$

gilt. Wegen (3.18) und (3.22) reduziert sich die Zahl der den Stoß beschreibenden Freiheitsgrade auf acht, nämlich

$$\left(\dot{\mathbf{S}}, \mathbf{v}, \theta, \varphi \right). \quad (3.25)$$

Wir wollen den Stoßprozess von Teilchen A mit Teilchen B quantenmechanisch beschreiben und verwenden dazu den differentiellen Wirkungsquerschnitt [8, S. 479 ff.]. Wir wählen das Ruhesystem von Teilchen B als Bezugssystem. Die Geschwindigkeit von Teilchen A in diesem Bezugssystem ist vor dem Stoß \mathbf{V} und nach dem Stoß \mathbf{V}' . Durch die Winkel θ und φ wird ein, wie in Kugelkoordinaten üblich definiertes, Raumwinkel-element $d\Omega$ festgelegt.

Betrachten wir eine große Anzahl von Teilchen A, welche alle die selbe Geschwindigkeit \mathbf{V} haben. Wir konstruieren eine Ebene, die senkrecht zur Einfallsrichtung der Teilchen A steht und durch B verläuft (siehe Abb. 3). Gäbe es keine Wechselwirkung der Teilchen A mit Teilchen B, würden N_{ein} Teilchen A eine Flächeneinheit dA dieser Ebene in der Zeiteinheit dt durchqueren. Durch die Wechselwirkung mit Teilchen B werden die einfallenden Teilchen A gestreut. Die Zahl der Teilchen A, welche je Zeiteinheit dt in das Raumwinkelement $d\Omega$ gestreut werden, wird mit $N_{d\Omega}$ bezeichnet. Aufgrund der Definition des differentiellen Wirkungsquerschnitts [7, S. 385] gilt

$$N_{d\Omega} = N_{\text{ein}} \frac{1}{dA} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.26)$$

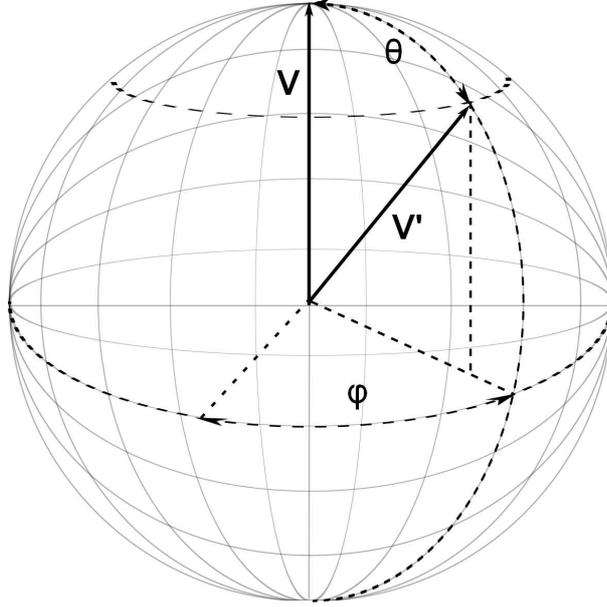


Abbildung 2: Man erhält die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß \mathbf{V}' durch Drehung der Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß \mathbf{V} . Die Richtung von \mathbf{V}' in Bezug auf \mathbf{V} wird durch die Winkel θ und φ festgelegt. (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Kugelkoordinaten.svg>, 23.07.2013, von mir verändert)

Jedes Teilchen A legt in der Zeiteinheit dt eine Strecke der Länge $|\mathbf{V}|dt$ zurück. Ohne Wechselwirkung mit B durchqueren folglich alle Teilchen A die Flächeneinheit dA , die sich im Volumen $|\mathbf{V}|dtdA$ vor dA befinden (siehe Abb. 3). Das Volumenelement liege vollständig in der Umgebung d^3x um \mathbf{x} . Nach Definition 1 ist die Teilchendichte der Teilchen A in diesem Volumenelement zum Zeitpunkt t durch

$$\frac{f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v}{d^3x} = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (3.27)$$

gegeben. Somit kann N_{ein} durch

$$N_{ein} = |\mathbf{V}|dtdA \cdot f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (3.28)$$

dargestellt werden, wodurch man den Ausdruck

$$N_{d\Omega} = |\mathbf{V}| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dt d^3v \quad (3.29)$$

für $N_{d\Omega}$ erhält.

Im Volumenelement d^3x um \mathbf{x} befinden sich zur Zeit t nach Definition 1

$$f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) d^3x d^3v_2 \quad (3.30)$$

Streuzentren B. Die Gesamtzahl der je Zeiteinheit dt in $d\Omega$ gestreuten Teilchen A ist deshalb

$$N_{d\Omega, ges} = N_{d\Omega} \cdot f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) d^3x d^3v_2 = |\mathbf{V}| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) dt d^3x d^3v d^3v_2. \quad (3.31)$$

Mit diesem Ausdruck für $N_{d\Omega, ges}$ haben wir die Möglichkeit, die Form des Stoßterms herzuleiten. Im Folgenden wird diese Herleitung durchgeführt.

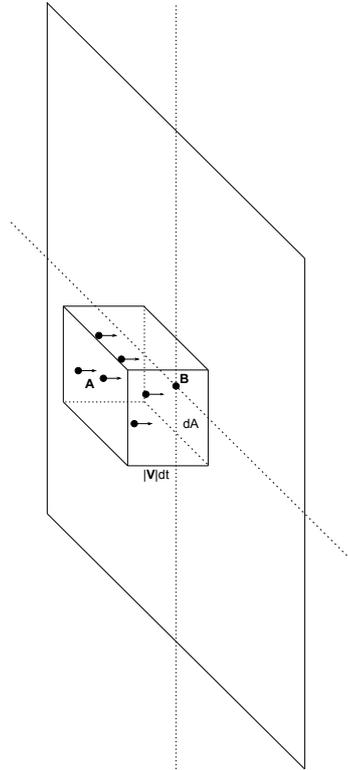


Abbildung 3: Alle Teilchen A, die sich im kleinen Volumen $|V| dt dA$ befinden, durchdringen das Flächenelement dA der Ebene in der Zeiteinheit dt .

3.2.3 Die allgemeine Form des Stoßterms

Bezeichnet man mit

$$g_s dt d^3x d^3v \text{ bzw. } \nu_s dt d^3x d^3v \quad (3.32)$$

die Zahl der Teilchen mit Spin s , welche im Zeitintervall dt durch einen Stoß in die betrachtete Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) hinein bzw. aus dieser heraus gestoßen werden, kann der in Definition 2 eingeführte Stoßterm (3.5) als Differenz dieses sogenannten Gewinn- bzw. Verlustterms dargestellt werden [8, S. 448]

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{st} dt d^3x d^3v = (g_s - \nu_s) dt d^3x d^3v. \quad (3.33)$$

Wir betrachten den in Abbildung (4) visualisierten Verlustprozess. Dieser entspricht dem im vorherigen

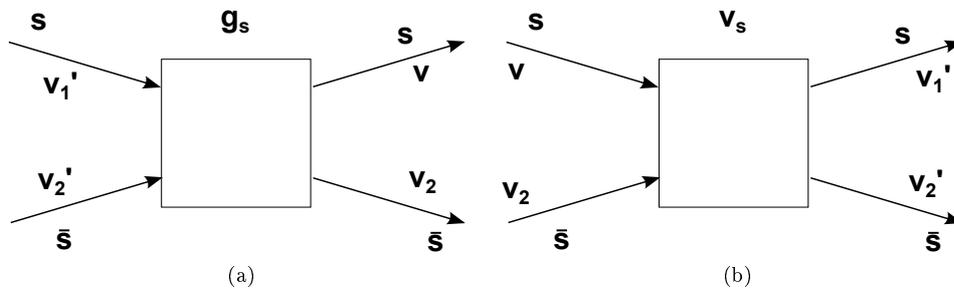


Abbildung 4: Gewinnprozess a) und Verlustprozess b)

Abschnitt untersuchten Stoß zwischen den Teilchen A und den Teilchen B und wird somit durch Gleichung (3.31) beschrieben.

Um alle Verlustprozesse zu berücksichtigen, wird (3.31) über alle Geschwindigkeiten \mathbf{v}_2 integriert. Durch die anschließende Integration über alle Raumwinkelemente $d\Omega$ werden alle kinetisch möglichen \mathbf{v}'_1 und \mathbf{v}'_2 miteinbezogen. Dadurch erhält man den Verlustterm

$$\nu_s dt d^3x d^3v = \int d^3v_2 \int d\Omega f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{V}| dt d^3x d^3v. \quad (3.34)$$

Der Gewinnprozess ist ebenfalls in Abbildung (4) veranschaulicht. Der Gewinnterm lässt sich unter Anwendung der Relation $d^3v'_1 d^3v'_2 = d^3v d^3v_2$ [6, S. 613] analog zum Verlustterm berechnen, sodass man

$$g_s dt d^3x d^3v = \int d^3v_2 \int d\Omega f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{V}| dt d^3x d^3v \quad (3.35)$$

erhält. Zusammengefasst ergeben Gewinn- und Verlustterm die Form

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{St} = \int d^3v_2 \int d\Omega [f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) - f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{V}| \quad (3.36)$$

für den Stoßterm. Mit diesem Ausdruck für den Stoßterm ist die Boltzmann-Gleichung vollständig. Diese stellt somit eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung dar, welche auch für zahlreiche Näherungen schwierig zu lösen ist [8, S. 449].

Bei der Herleitung des Stoßterms haben wir nur elastische Zwei-Teilchen-Stöße berücksichtigt, sodass die Boltzmann-Gleichung nur Systeme beschreibt, in denen inelastische Stöße und Stöße zwischen mehr als zwei Teilchen vernachlässigbar sind.

Außerdem wurde die Annahme gemacht, dass der Stoß zweier Teilchen durch das Produkt zweier Verteilungsfunktionen beschrieben werden kann. Diese Annahme bezeichnet man als molekulares Chaos oder Stoßzahlansatz. Die Gültigkeit dieser beschränkt sich auf Systeme mit geringer Dichte, in denen Teilchen nur über eine geringe Reichweite wechselwirken [2, S. 80 f.], [8, S. 448]. Beide Annahmen sind für das in Kapitel 2 beschriebene System erfüllt.

Eine Anwendung des Stoßterms ist die Berechnung der sogenannten Streurrate. Neben der Herleitung der Streurrate wird im nächsten Abschnitt die Maxwell-Boltzmann-Verteilung eingeführt.

3.3 System ohne äußere Kraft - Maxwell-Boltzmann-Verteilung und Streurrate

In diesem Abschnitt betrachten wir das in Kapitel 2 beschriebene System mit der zusätzlichen Annahme, dass $F_0 = 0$ gilt, d. h. im ganzen System keine äußere Kraft auf die Teilchen wirkt.

Das System ist hinsichtlich der Vertauschung

$$s \longmapsto \bar{s}, \quad \bar{s} \longmapsto s \quad (3.37)$$

symmetrisch. Daraus folgt die Äquivalenz der Verteilungsfunktionen beider Teilchensorten, sodass wir eine Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ für die Beschreibung des Systems verwenden können, d. h.

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\bar{s}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t). \quad (3.38)$$

Der Stoßterm aus (3.36) nimmt daher die Form

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{St} = \int d^3v_2 \int d\Omega [f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t)] \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{V}| \quad (3.39)$$

an. Man kann mit Hilfe des sogenannten H-Theorems zeigen, dass sich in diesem System ein Gleichgewicht einstellt, welches durch die Gleichgewichtsverteilung

$$f^{MB}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (2\pi T)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2T} \right] \quad (3.40)$$

beschrieben wird. Diese Verteilungsfunktion wird als Maxwell-Boltzmann-Verteilung bezeichnet [8, S. 451 ff.].

Definition 6 Die Streurrate γ beschreibt die mittlere Anzahl der Stöße zur Zeit t im kompletten Volumen eines betrachteten Systems je Zeiteinheit dt .

Im Zeitintervall dt stößt jedes Teilchen im Mittel $\frac{dt}{\tau}$ mal. Da sich im System N Teilchen befinden, ergibt sich der Zusammenhang

$$\gamma = \frac{N}{\tau}. \quad (3.41)$$

Um die Streurrate für das System im Gleichgewicht herzuleiten, betrachten wir den Verlustterm. Dieser beschreibt alle Stöße zur Zeit t , welche in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) in der Zeiteinheit dt stattfinden. Durch die Integration des Verlustterms über alle Geschwindigkeitsumgebungen d^3v und Volumenelemente d^3x werden alle Stoßprozesse, die im Zeitintervall $[t, t + dt]$ im ganzen Volumen stattfinden, berücksichtigt. Für die Streurrate gilt dadurch

$$\gamma = \frac{1}{dt} \int d^3x \int d^3v \nu_s dt = N \int d^3v \nu_s. \quad (3.42)$$

Mit Hilfe der Form des Verlustterms (3.34) und der Maxwell-Boltzmann-Verteilung gilt

$$\begin{aligned} \gamma &= N \int d^3v \int d^3v_2 f^{MB}(\mathbf{v}) f^{MB}(\mathbf{v}_2) \frac{4\pi a^2}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}} |\mathbf{V}| \\ &= \pi a^2 N (2\pi T)^{-3} \int d^3v \int d^3v_2 \frac{\exp\left[-\frac{1}{2T}(|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v}_2|^2)\right]}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}} |\mathbf{V}|. \end{aligned} \quad (3.43)$$

In [6, S. 613] wird gezeigt, dass sich $d^3v d^3v_2$ bei einer Transformation in das SchwerpunktRelativkoordinatensystem nicht ändert, d. h.

$$d^3v d^3v_2 = d^3V d^3S. \quad (3.44)$$

Führen wir diesen Koordinatensystemwechsel durch, gilt für das Integral

$$\gamma = \pi a^2 N (2\pi T)^{-3} \int d^3V \int d^3S \frac{\exp\left[-\frac{1}{2T}\left(\frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2 + 2|\mathbf{S}|^2\right)\right]}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}} |\mathbf{V}|. \quad (3.45)$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich für die Streurrate

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} T^{-\frac{3}{2}} a^2 N \int_0^\infty d|\mathbf{V}| \frac{\exp\left[-\frac{1}{4T}|\mathbf{V}|^2\right]}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}} |\mathbf{V}|^3. \quad (3.46)$$

Nach dieser Betrachtung eines Systems im Gleichgewicht wollen wir im nächsten Kapitel Nichtgleichgewichtszustände behandeln und die dort auftretenden Transportprozesse verstehen. Dazu behandeln wir das System aus Kapitel 2 in unterschiedlichen Variationen: Zuerst wird die Kraft im ganzen System wirken. Danach betrachten wir das System zwar mit Kraftschicht, aber mit klassischen Teilchen einer Teilchensorte. Am Ende des nächsten Kapitels wird das System mit Kraftschicht und Fermionen, bestehend aus zwei Teilchensorten, beschrieben.

4 Nichtgleichgewichtszustände und Transportkoeffizienten

4.1 Transportvorgänge, Relaxationszeit-Näherung und Linear Response

Befindet sich ein Gas in einem Nichtgleichgewichtszustand, können durch die Wechselwirkung und Bewegung der Teilchen physikalische Größen, wie z. B. Impuls, Energie oder Teilchenzahl transportiert werden. Um solche Transportvorgänge zu verstehen, muss man den Nichtgleichgewichtszustand des Systems beschreiben. Dabei existieren zu jedem Transportvorgang Größen, welche grundlegende Eigenschaften des Transportvorgangs charakterisieren. Diese bezeichnet man als Transportkoeffizienten [6, Kapitel 12 - 14].

Im Folgenden betrachten wir Systeme, die sich aufgrund einer kleinen Störung des Gleichgewichtszustands, in unserem Fall eine äußere Kraft, in einem Nichtgleichgewichtszustand befinden. Der Begriff „kleine Störung“ hat je nach System eine andere Bedeutung. Im Falle einer äußeren Kraft ist allerdings folgende Annahme sinnvoll: Werden Teilchen im System, während der stoßfreien Bewegung im mittleren Zeitintervall τ , durch die äußere Kraft nur so stark beschleunigt, dass sich ihr mittlerer Geschwindigkeitsbetrag dadurch kaum ändert, kann man davon ausgehen, dass es sich bei der äußeren Kraft um eine kleine Störung des Systems handelt.

Liegt eine Störung des Systems vor, resultieren aus dieser physikalische Terme. Für kleine Störungen geht man von der sogenannten Linear Response des Systems aus, d. h. die aus der Störung resultierenden Terme sind proportional zur Ursache der Störung, in unserem Fall zur äußeren Kraft. Die Transportkoeffizienten entsprechen dabei den Proportionalitätskonstanten [9].

Im Folgenden betrachten wir das in Kapitel 2 vorgestellte System. Wir machen im Folgenden die Näherung, dass eine einzige Zeitskala ausreicht, um Transportprozesse, welche im System vorkommen, hinreichend genau zu beschreiben. Diese Näherung bezeichnet man als Relaxationszeit-Näherung [6, Kapitel 13]. Außerdem machen wir die Annahme, dass diese relevante Zeitskala, die sogenannte Relaxationszeit, der mittleren Stoßzeit τ im System entspricht.

Um zu verstehen, dass diese Annahme eine Näherung darstellt, betrachten wir Teilchen, deren Geschwindigkeitsbetrag viel größer als der mittlere Geschwindigkeitsbetrag der Teilchen im System ist. Bei einem Stoß solcher Teilchen ist der Relativgeschwindigkeitsbetrag $|\mathbf{V}|$ der beiden Stoßpartner im Mittel höher als dies in den meisten anderen Stößen im System der Fall ist. Für die mittlere Stoßzeit solcher Teilchen gilt nach [8, S. 451]

$$\tau(|\mathbf{V}|) \sim \frac{1}{\sigma|\mathbf{V}|}. \quad (4.1)$$

Mit der Form des totalen Wirkungsquerschnitts (2.6) folgt daraus

$$\tau(|\mathbf{V}|) \sim \frac{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}}{|\mathbf{V}|}. \quad (4.2)$$

Für die Streurrate γ ergibt sich mit Relation der (3.41)

$$\gamma \sim \frac{|\mathbf{V}|}{1 + \frac{a^2|\mathbf{V}|^2}{4}}. \quad (4.3)$$

Der prinzipielle Verlauf dieser in Abhängigkeit des Relativgeschwindigkeitsbetrags ist in Abbildung (5) dargestellt. Für die betrachteten schnellen Teilchen mit vergleichsweise hohem Relativgeschwindigkeitsbetrag bei einem Stoß ist die Stoßzeit im Vergleich zur mittleren Stoßzeit stark erhöht. Man kann daher generell nicht davon ausgehen, dass die mittlere Stoßzeit die einzig relevante Zeitskala darstellt.

Wir werden im nächsten Abschnitt eine erste Variation des Systems aus Kapitel 2 untersuchen und dabei den Transportkoeffizienten Spin-Drag kennenlernen.

4.2 Der Spin-Drag

4.2.1 Kraft im ganzen System

Wir betrachten das in Kapitel 2 beschriebene System. Im Zeitbereich $t < t_{an}$ soll die äußere Kraft im ganzen System verschwinden und ab dem Zeitpunkt $t = t_{an}$ überall im System wirken. Für $t < t_{an}$ ist das System äquivalent zu dem System ohne äußere Kraft aus Abschnitt 3.3. In diesem Zeitbereich stellt sich eine Gleichgewichtsverteilung ein, welche durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben wird. Für die mittlere x-Geschwindigkeit der Teilchen mit Spin s gilt für $t < t_{an}$

$$\langle v_{s,x}^{nF} \rangle = 0. \quad (4.4)$$

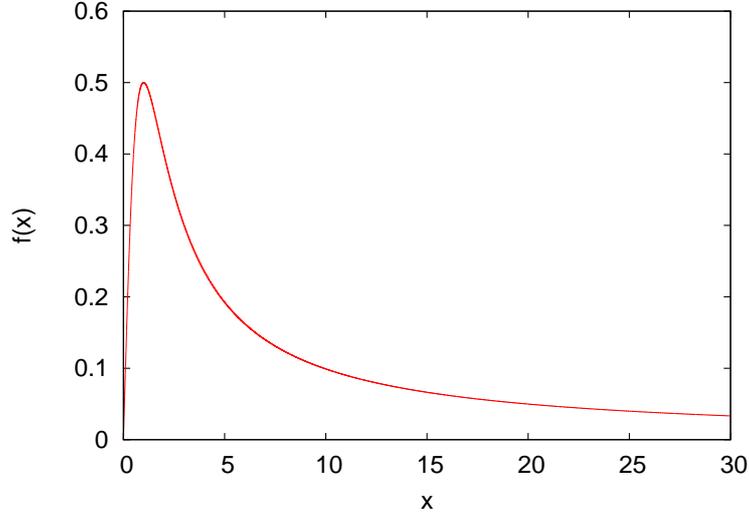


Abbildung 5: Verlauf der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, welche das Verhalten der Streurrate in Abhängigkeit des Relativgeschwindigkeitsbetrags charakterisiert.

Zur Zeit $t = t_{an}$ wird die äußere Kraft „aktiviert“. Zu diesem Zeitpunkt hat ein Teilchen mit Spin s im Mittel das letzte Mal zur Zeit $t_{an} - \frac{\tau}{2}$ einen Stoß erlitten und wird somit um

$$\Delta v_{s,x} = sF_0 \frac{\tau}{2} \quad (4.5)$$

beschleunigt, bis es mit einem Teilchen der Teilchensorte \bar{s} zusammenstößt. Für die mittlere x-Geschwindigkeit vor dem Zusammenstoß gilt somit

$$\langle v_{s,x} \rangle = sF_0 \frac{\tau}{2}. \quad (4.6)$$

In Abschnitt 3.2.2 haben wir einen solchen Stoßvorgang mikroskopisch betrachtet und festgestellt, dass die Relativgeschwindigkeit der beiden stoßenden Teilchen durch den Stoß gedreht wird. Da der stoßbeschreibende differentielle Wirkungsquerschnitt (2.5) rotationssymmetrisch ist, sind alle Drehwinkel gleich wahrscheinlich. Hat die x-Relativgeschwindigkeit vor dem Stoß den Wert V_x , gilt für die x-Relativgeschwindigkeit V'_x nach dem Stoß

$$-|\mathbf{V}| \leq V'_x \leq |\mathbf{V}|. \quad (4.7)$$

Da jeder Drehwinkel gleich wahrscheinlich ist, wird auch jeder Wert in $[-|\mathbf{V}|, |\mathbf{V}|]$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen. Im Mittel verschwindet also die x-Relativgeschwindigkeit V'_x nach dem Stoß. Wir bezeichnen mit $\langle v'_{s,x} \rangle$ die mittlere x-Geschwindigkeit des Teilchens mit Spin s direkt nach dem Stoß. Dadurch gilt mit der Definition der Relativgeschwindigkeit

$$\langle V'_x \rangle = \langle v'_{s,x} \rangle - \langle v'_{\bar{s},x} \rangle = 0, \quad (4.8)$$

d. h.

$$\langle v'_{s,x} \rangle = \langle v'_{\bar{s},x} \rangle. \quad (4.9)$$

Im Mittel bewegen sich die beiden Stoßpartner direkt nach dem Stoß mit der selben x-Geschwindigkeit. Da vor dem Stoß im Mittel

$$\langle v_{s,x} \rangle = -\langle v_{\bar{s},x} \rangle \quad (4.10)$$

gilt, ist keine x-Richtung ausgezeichnet, wodurch die mittlere x-Geschwindigkeit nach dem Stoß verschwindet, d. h.

$$\langle v'_{s,x} \rangle = 0. \quad (4.11)$$

Das Teilchen wird also im Mittel zuerst im Zeitintervall $[t_{an}, t_{an} + \frac{\tau}{2}]$ beschleunigt, stößt und verliert dadurch seine gewonnene x-Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_{an} + \frac{\tau}{2}$.

Anschließend wird jedes Teilchen mit Spin s im Mittel in der Zeit τ um

$$\Delta v_{s,x} = sF_0\tau \quad (4.12)$$

beschleunigt, um bei dem darauf folgenden Stoß diese x-Geschwindigkeit wieder zu verlieren. Teilchen mit Spin \uparrow bzw. Spin \downarrow haben folglich im Mittel eine x-Geschwindigkeit im Intervall $[0, F_0\tau]$ bzw. $[-F_0\tau, 0]$. Da alle Werte in den Intervallen gleich wahrscheinlich sind, haben Teilchen mit Spin s im System zur Zeit $t \gg t_{an} + \tau$ die mittlere x-Geschwindigkeit

$$u_s := \langle v_{s,x} \rangle = \frac{sF_0\tau}{2}. \quad (4.13)$$

Dadurch gilt für die Differenz der mittleren x-Geschwindigkeiten beider Teilchensorten

$$F_0 = \frac{1}{\tau} (u_{\uparrow} - u_{\downarrow}). \quad (4.14)$$

Die Kraft F_0 ist proportional zur Differenz der mittleren x-Geschwindigkeiten beider Teilchensorten.

Definition 7 Gilt die Relation $(u_{\uparrow} - u_{\downarrow}) \sim F_0$ wird die Proportionalitätskonstante als Spin-Drag Γ_{SD} bezeichnet.

In der gesamten Herleitung haben wir die Relaxationszeit-Näherung mit der Relaxationszeit τ verwendet. In dieser gilt $\Gamma_{SD} = \frac{1}{\tau}$.

Kurz nach dem „Einschalten“ der Kraft F_0 bewegen sich im Mittel Teilchen mit Spin \uparrow in positive x-Richtung und Teilchen mit Spin \downarrow in negative x-Richtung. Es findet ein Teilchentransport statt, wobei die Teilchen in entgegengesetzte Richtungen transportiert werden. Da die Transportrichtung vom Spin der Teilchen abhängig ist, wird der Transportprozess häufig als Spin-Transport bezeichnet. Der Spin-Drag ist dabei der Transportkoeffizient [2, S. 103 ff.].

Wir wollen die Relation (4.14) durch das Konzept der Linear Response verstehen.

Das System ohne äußere Kraft wird durch das „Anschalten“ der äußeren Kraft zum Zeitpunkt t_{an} gestört. In der Zeitspanne $t < t_{an}$ haben die Teilchen aufgrund der Maxwell-Boltzmann-Verteilung den mittleren x-Geschwindigkeitsbetrag $\langle |v_{s,x}^{nF}| \rangle \sim \sqrt{T}$. Für Zeiten $t \gg t_{an} + \tau$ ist der mittlere x-Geschwindigkeitsbetrag der Teilchen $\langle |v_{s,x}| \rangle$ durch die äußere Kraft erhöht, wobei man davon ausgehen kann, dass $\langle |v_{s,x}| \rangle - \langle |v_{s,x}^{nF}| \rangle \sim F_0\tau$ gilt. Die Störung des Systems durch die äußere Kraft ist klein wenn sich der mittlere x-Geschwindigkeitsbetrag durch diese kaum ändert, d. h. wenn $\frac{\langle |v_{s,x}| \rangle - \langle |v_{s,x}^{nF}| \rangle}{\langle |v_{s,x}^{nF}| \rangle} \ll 1$ gilt. Ist folglich die Bedingung $F_0\tau \ll \sqrt{T}$ erfüllt, kann man davon ausgehen, dass das System durch die äußere Kraft nur geringfügig gestört wird. Aus der Störung des Systems resultiert der Term $(u_{\uparrow} - u_{\downarrow})$. Ist die Störung klein, besagt das Konzept der Linear Response, dass dieser Term proportional zu F_0 ist. Dieses Ergebnis wurde durch die mikroskopische Betrachtung bestätigt.

Diesen Abschnitt abschließend wollen wir den Begriff des stationären Zustands einführen. Von dem im System auftretenden Teilchentransport abgesehen könnte man aufgrund der bisher durchgeführten Herleitungen vermuten, dass sich im System ein Gleichgewichtszustand eingestellt hat, da alle makroskopischen Zustandsparameter konstant sind. In [6, S. 542 ff.] wird anhand eines Beispiels erklärt, dass bei einem nicht abgeschlossenen System alle makroskopischen Zustandsparameter konstant sein können, obwohl sich das System nicht im Gleichgewicht befindet. Ein solcher Zustand wird als stationärer Zustand bezeichnet. Da auf unser System eine äußere Kraft wirkt, handelt es sich um ein nicht abgeschlossenes System. Das System befindet sich somit für Zeiten $t \gg t_{an} + \tau$ in einem stationären Zustand. Dieser wird durch die Verteilungsfunktion

$$f_s^{stat}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (2\pi T)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}_s)^2}{2T}} \text{ mit } \mathbf{u}_s = (u_s, 0, 0) \quad (4.15)$$

beschrieben.

Man kann leicht nachprüfen, dass für diese Verteilungsfunktion

$$2 \int d^3v f_s^{stat}(\mathbf{v}) v_x = u_s \quad (4.16)$$

gilt, sodass diese die grundlegende Eigenschaft des Systems - eine mittlere x-Geschwindigkeit - widerspiegelt.

Wir haben bisher angenommen, dass sich die mittlere Stoßzeit τ durch das „Anschalten“ der äußeren Kraft nicht verändert. Wir werden diese Annahme im nächsten Abschnitt verwerfen und mit Hilfe einer Bilanzgleichung untersuchen, ob sich trotzdem ein stationärer Zustand im System einstellt. Außerdem haben wir angenommen, dass die Temperatur im System konstant ist. Diese Annahme wird im übernächsten Abschnitt genauer untersucht.

4.2.2 Bilanzgleichung und nicht-stationärer Zustand

Die Relaxationszeit-Näherung impliziert, dass die Relaxationszeit τ eine zeitliche Konstante darstellt. Um zu verstehen, dass sich im System nach dem „Einschalten“ der äußeren Kraft nicht zwingend ein stationärer Zustand einstellen muss, nehmen wir aufgrund der Symmetrie des Systems an, dass τ von $(u_\uparrow - u_\downarrow)$ abhängt. Ist $(u_\uparrow - u_\downarrow)$ eine Funktion der Zeit, verlassen wir dadurch die Relaxationszeit-Näherung.

Im Folgenden verwenden wir die Notation

$$u := \frac{u_\uparrow - u_\downarrow}{2}. \quad (4.17)$$

Wir wollen zuerst eine Bilanzgleichung für den x-Impuls im System aufstellen: Vor einem Zusammenstoß haben Teilchen mit Spin s im Mittel den x-Impuls $\langle p_{s,x} \rangle = 2u_s$. Direkt nach dem Stoßvorgang verschwindet die mittlere x-Geschwindigkeit und damit der mittlere x-Impuls der Teilchen. Bei jedem Stoß wird folglich im Mittel je Teilchensorte s der x-Impuls

$$\langle \Delta p_{s,x}^{ver} \rangle = 2u_s \quad (4.18)$$

„vernichtet“. Im Zeitintervall $[t, t + dt]$ finden im System $\gamma(u)dt$ Stöße statt. Für den gesamten im Mittel vernichteten x-Impuls je Teilchensorte s gilt somit

$$\langle \Delta p_{s,x}^{ver} \rangle_{ges} = 2u_s \gamma(u) dt. \quad (4.19)$$

Dem System wird in der Zeiteinheit dt je Teilchensorte s durch die äußere Kraft der x-Impuls $\Delta p_{s,x}^{zu} = sNF_0 dt$ zugeführt. Um einen stationären Zustand zu erhalten muss der in einer Zeiteinheit dt zugeführte x-Impuls je Teilchensorte s durch Zusammenstöße wieder „vernichtet“ werden. Mit dieser Forderung erhält man hinsichtlich des x-Impulses der Teilchensorte s die Bilanzgleichung

$$\langle \Delta p_{s,x}^{ver} \rangle_{ges} = \Delta p_{s,x}^{zu} \quad (4.20)$$

bzw.

$$\frac{2}{s} u_s \gamma(u) = NF_0. \quad (4.21)$$

Betrachten wir nun den Fall, in dem die Kraft F_0 groß genug ist, dass die Teilchen in der Zeitspanne τ um ein Vielfaches ihres mittleren x-Geschwindigkeitsbetrags beschleunigt werden, d. h.

$$F_0 \tau \gg \langle |v_x| \rangle. \quad (4.22)$$

In diesem Bereich wird die Geschwindigkeit der Teilchen durch die aus der Kraft F_0 resultierende x-Geschwindigkeit dominiert. Da die Teilchensorten in entgegengesetzte x-Richtungen beschleunigt werden, gilt in diesem Bereich für den Relativgeschwindigkeitsbetrag der Teilchen bei einem Zusammenstoß näherungsweise

$$|\mathbf{V}| \approx 2u. \quad (4.23)$$

Dadurch ist die linke Seite der Bilanzgleichung unter Verwendung von (4.3) und (4.23) proportional zur Funktion

$$f(|u|) = \frac{u^2}{1 + \frac{a^2 u^2}{4}}, \quad (4.24)$$

deren prinzipieller Verlauf in Abbildung (6) visualisiert ist. $f(u)$ und damit die linke Seite der Bilanzgleichung

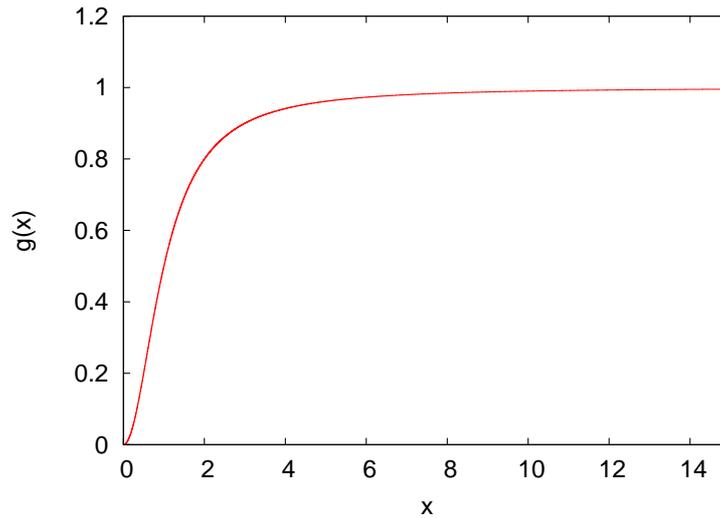


Abbildung 6: Darstellung der Funktion $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, welche das prinzipielle Verhalten von $f(|u|)$ widerspiegelt.

chung (4.21) sind beschränkt. Bei zu hoher Kraft F_0 kann das Gleichheitszeichen in der Bilanzgleichung somit nicht mehr gelten. Es wird dann mehr x-Impuls je Teilchensorte s in dt zugeführt als “vernichtet” und die Teilchen werden in x-Richtung immer schneller. Dadurch nimmt die Stoßrate immer weiter ab, sodass es keine Möglichkeit gibt einen stationären Zustand zu erreichen. Das System befindet sich dann in einem nicht-stationären Zustand.

Ist die Bilanzgleichung hingegen erfüllt befinden wir uns nach kurzer Zeit in einem stationären Zustand. Die Stoßzeit $\tau(u)$ ist damit zeitlich konstant und somit befinden wir uns wieder innerhalb der Relaxationszeit-Näherung. Aus der Bilanzgleichung lässt sich dann die bereits zuvor erhaltene Gleichung

$$F_0 = \frac{1}{\tau(u)} (u_{\uparrow} - u_{\downarrow}) \quad (4.25)$$

herleiten. Der Spin-Drag ist wiederum durch $\frac{1}{\tau(u)}$ gegeben.

4.2.3 Temperatur im System

Um die Temperatur im System genauer verstehen zu können, betrachten wir ein Teilchen mit Spin s direkt nach einem Stoß. Wir haben bereits festgestellt, dass die mittlere x-Geschwindigkeit von Teilchen direkt nach dem Stoß verschwindet. Wir betrachten ein Teilchen mit Spin s , dessen Geschwindigkeit direkt nach einem Stoß in der Umgebung d^3v um \mathbf{v} liegt. Zu diesem Zeitpunkt hat das Teilchen die kinetische Energie

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]. \quad (4.26)$$

Anschließend bewegt sich das Teilchen im Mittel während der Zeit τ stoßfrei und hat nach dieser aufgrund der äußeren Kraft die kinetische Energie

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2} [(v_x + sF_0\tau)^2 + v_y^2 + v_z^2]. \quad (4.27)$$

Wir fragen uns nach der mittleren kinetischen Energieänderung im Zeitintervall τ . Die Wahrscheinlichkeit des Teilchens direkt nach dem Stoß eine Geschwindigkeit in der Umgebung d^3v um \mathbf{v} zu haben, folgt der Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Für die kinetische Energieänderung im Zeitintervall τ gilt

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} [(v_x + sF_0\tau)^2 - v_x^2] = \frac{1}{2} [(F_0\tau)^2 + 2sF_0\tau v_x]. \quad (4.28)$$

Dadurch gilt für die mittlere kinetische Energieänderung eines Teilchens mit Spin s im Zeitintervall τ

$$\langle \Delta E_{kin} \rangle = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \exp\left[-\frac{v_x^2}{2T}\right] \frac{1}{2} [(F_0\tau)^2 + 2sF_0\tau v_x] = \frac{1}{2} (F_0\tau)^2. \quad (4.29)$$

Direkt nach dem Stoß hat das Teilchen im Mittel die kinetische Energie

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} [\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle] \quad (4.30)$$

und es gilt aufgrund der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (4.31)$$

Die im Mittel zugeführte kinetische Energie $\langle \Delta E_{kin} \rangle$ wird durch einen Stoßprozess auf alle Freiheitsgrade verteilt. Dieser Vorgang wird als Dissipation bezeichnet. Da an jedem Stoßvorgang zwei Teilchen beteiligt sind, wird im Mittel je Stoßvorgang die kinetische Energie

$$2\langle \Delta E_{kin} \rangle = (F_0\tau)^2 \quad (4.32)$$

dissipiert. Im Zeitintervall Δt finden im ganzen System $\gamma\Delta t$ Stöße statt. In diesem Zeitintervall erhöht sich daher die mittlere kinetische Energie im Mittel um

$$\langle \Delta E_{kin,ges} \rangle = \gamma\Delta t (F_0\tau)^2. \quad (4.33)$$

Da die mittlere kinetische Energie des Systems über die Relation

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2}T \quad (4.34)$$

mit der Temperatur zusammenhängt, erhöht sich diese im Zeitintervall Δt um

$$\Delta T = \frac{2}{3}\gamma\Delta t (F_0\tau)^2 = \frac{2}{3}NF_0^2\tau\Delta t. \quad (4.35)$$

Die Annahme einer konstanten Temperatur im System ist folglich eine Näherung, welche für

$$\frac{\Delta T}{T} \ll 1 \Rightarrow F_0^2\Delta t \ll \frac{3T}{2N\tau} \quad (4.36)$$

hinreichend gut erfüllt ist. Durch kurze Beobachtungszeiten Δt und kleine Kräfte F_0 ist dieses Regime praktisch gut zu realisieren.

Anschließend untersuchen wir das System mit einer auf die Kraftschicht begrenzten äußeren Kraft. Dabei wollen wir dieses zuerst für klassische Teilchen beschreiben.

4.3 Die Scherviskosität

4.3.1 System mit klassischen Teilchen

Um ein Gefühl für die Scherviskosität zu bekommen, betrachten wir zuerst das in Kapitel 2 beschriebene System mit der zusätzlichen Annahme, dass das Gas aus klassischen Teilchen einer Teilchensorte besteht, die untereinander ohne Einschränkung wechselwirken können. In der zuvor eingeführten Kraftschicht wirkt auf die Teilchen die konstante Kraft F_0 in positive x-Richtung. Wie im System aus Kapitel 2 wählen wir für die Dichte $n = 1 \left[\frac{1}{\text{Volumeneinheit}} \right]$. Das System ist zusätzlich in die positive und negative z-Richtung unendlich ausgedehnt und hat hinsichtlich der x- und y-Koordinate die bereits beschriebenen periodischen Randbedingungen.

Wir betrachten dieses System und stellen fest, dass der Kraftschicht in der Zeiteinheit dt der x-Impuls

$$\Delta p_{zu} = V_{KS} F_0 dt = Ad \cdot F_0 dt \quad (4.37)$$

zugeführt wird. Dabei ist V_{KS} das Volumen der Kraftschicht und es gilt $A = L^2$. Wir bezeichnen mit $\langle |v_z| \rangle$ den mittleren z-Geschwindigkeitsbetrag der Teilchen und mit τ die mittlere Stoßzeit, welche wir innerhalb der Relaxationszeit-Näherung als einzige relevante Zeitskala betrachten.

Die Kraftschicht sei so dünn, dass sie von den meisten Teilchen ohne zu stoßen durchquert wird:

$$d \ll \langle |v_z| \rangle \tau \quad (4.38)$$

Um der Symmetrie des Systems gerecht zu werden, unterteilen wir dieses in sogenannte Messschichten der Dicke \tilde{d} , welche parallel zur Kraftschicht liegen (siehe Abb. 7).

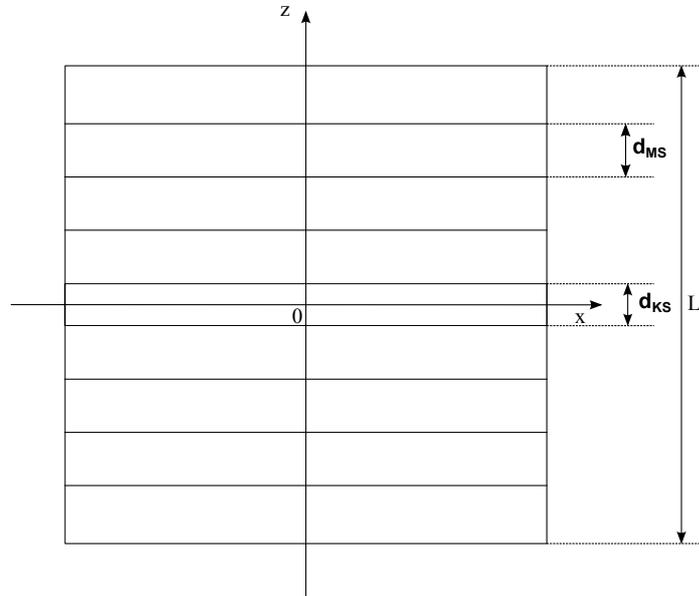


Abbildung 7: Das System wird in Messschichten unterteilt - Schnitt durch die x-z-Ebene. In der Abbildung gilt $d_{MS} = \tilde{d}$ und $d_{KS} = d$.

Wir notieren mit $u(z, t)$ die mittlere x-Geschwindigkeit der Teilchen in einer Messschicht um $z = \text{const.}$ zur Zeit t . Teilchen, welche die Kraftschicht durchqueren, haben den x-Impuls $F_0 \frac{d}{\langle |v_z| \rangle}$ aufgenommen und bewegen sich nach dem kurzen Aufenthalt in der Kraftschicht in eine der beiden Messschichten neben dieser. \tilde{d} soll groß genug sein, dass in einer Messschicht ein Stoß mit großer Wahrscheinlichkeit stattfindet, d. h.

$$\tilde{d} \approx \langle |v_z| \rangle \tau. \quad (4.39)$$

In den Messschichten neben der Kraftschicht stoßen folglich Teilchen, welche zuvor in der Kraftschicht x-Impuls aufgenommen haben, mit Teilchen in der Messschicht. Da in den Messschichten keine Kraft auf die Teilchen wirkt, wird bei solchen Stößen im Mittel x-Impuls auf die Teilchen der Messschicht übertragen. Die Teilchen in den Messschichten um die Kraftschicht können sich wiederum in andere Messschichten bewegen und dadurch ebenfalls x-Impuls übertragen. Es wird folglich x-Impuls in z-Richtung transportiert.

Für diesen Transport ist der sogenannte x-Impulsfluss in z-Richtung von Relevanz, um den es im nächsten Abschnitt gehen wird.

4.3.2 Der Impulsfluss

Da das System hinsichtlich einer Spiegelung an der $x - y - Ebene$ symmetrisch ist, behandeln wir im Folgenden nur den Halbraum des Systems mit positiver z-Komponente.

Definition 8 Wir betrachten eine zur $x - y - Ebene$ parallele Ebene $z = const.$ und bezeichnen mit $P_x(z, t)dt dA$ den gesamten x-Impuls, welcher im Zeitintervall $[t, t + dt]$ in z-Richtung durch eine Flächeneinheit dA dieser Ebene transportiert wird. Bei einem Netto-Transport von x-Impuls in positive z-Richtung sei $P_x(z, t)dt dA > 0$ und in negative z-Richtung $P_x(z, t)dt dA < 0$. $P_x(z, t)$ bezeichnet man als x-Impulsfluss in z-Richtung durch die $z = const.$ Ebene zur Zeit t [6, S. 583 f.].

Um die Frage nach der Zeitabhängigkeit des x-Impulsflusses in z-Richtung zu beantworten, betrachten wir die Grenze zwischen zwei benachbarten Messschichten, welche wir durch Schicht 1 und Schicht 2 notieren. In diesen haben Teilchen die mittlere x-Geschwindigkeit $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$. $\langle |v_z| \rangle$ ist im ganzen System konstant, da keine Kraft in z-Richtung wirkt. Es treten folglich genauso viele Teilchen von Schicht 1 nach 2 wie von 2 nach 1. Dadurch ist der im Mittel transportierte x-Impuls in z-Richtung zwischen den Schichten proportional zu $|u_1(t) - u_2(t)|$. Erhöht sich die mittlere x-Geschwindigkeit der Teilchen in einer Schicht durch x-Impulszufuhr in diese, erhöht sich folglich auch der x-Impulstransport in z-Richtung aus dieser. Nach einer bestimmten Zeit stellt sich folglich in den Messschichten ein stationärer Zustand ein, d. h. die mittlere x-Geschwindigkeit u nimmt einen konstanten Wert an. Da die Messschichten unterschiedlich weit von der Kraftschicht entfernt sind, stellt sich dieser stationäre Zustand zu unterschiedlichen Zeiten ein.

Wir betrachten im Folgenden Messschichten, welche sich so nah an der Kraftschicht befinden, dass sie sich bereits in einem stationären Zustand befinden. In diesen Schichten ist $u(z)$ unabhängig von t . Dadurch ist auch der x-Impulsfluss in z-Richtung in den betrachteten Messschichten zeitlich konstant. Dies impliziert einen konstanten Abtransport des in der Kraftschicht zugeführten x-Impulses und führt auf die Bilanzgleichung

$$P_x(z)dt A = \frac{1}{2} \Delta p_{zu} = \frac{1}{2} A dF_0 dt. \quad (4.40)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt die Tatsache, dass x-Impuls sowohl in positive als auch in negative z-Richtung abtransportiert werden kann.

Wir wollen nun einen Ausdruck für den x-Impulsfluss in z-Richtung durch die Ebene $z = const.$ herleiten.

Alle Teilchen mit Geschwindigkeiten $v_z > 0$ bzw. $v_z < 0$, welche sich in einer Schicht der Dicke $|v_z|dt$ unter bzw. über der Ebene $z = \text{const.}$ befinden, durchdringen diese in der Zeiteinheit dt von unten nach oben bzw. von oben nach unten. Die Anzahl der Teilchen, welche die Ebene in der Zeiteinheit dt von unten nach oben bzw. von oben nach unten durchdringen, ist somit durch

$$N_{u \rightarrow o} = f(z, \mathbf{v})v_z A d^3v dt \text{ mit } v_z > 0 \text{ bzw. } N_{o \rightarrow u} = f(z, \mathbf{v})(-v_z) A d^3v dt \text{ mit } v_z < 0 \quad (4.41)$$

gegeben. Jedes dieser Teilchen trägt den x-Impuls $p_x = v_x$. Den gesamten x-Impuls, welcher in der Zeiteinheit dt durch die Fläche A transportiert wird, berechnet man folglich durch Integration über alle Geschwindigkeiten, d. h.

$$P_x(z) dt A = \int_{v_z > 0} N_{u \rightarrow o} v_x - \int_{v_z < 0} N_{o \rightarrow u} v_x. \quad (4.42)$$

Der Fluss des x-Impulsfluss durch die Ebene $z = \text{const.}$ ist folglich durch

$$P_x(z) = \int d^3v f(z, \mathbf{v}) v_z v_x \quad (4.43)$$

gegeben [6, S. 583 f.].

Um den x-Impulsfluss in z-Richtung berechnen zu können, müssen wir die Form der Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ kennen. Diese kann durch die sogenannte Bahnintegralmethode, welche wir im übernächsten Abschnitt einführen, näherungsweise berechnet werden. Die Methode verwendet das Konzept des lokalen Gleichgewichts. Mit diesem werden wir uns im nächsten Abschnitt befassen.

4.3.3 Das lokale Gleichgewicht

Wir untersuchen eine der zuvor eingeführten Messschichten der Dicke \tilde{d} am Ort z . Wir betrachten diese als eigenständiges Untersystem. Die Teilchen in dieser Messschicht haben in der ganzen Schicht die konstante mittlere x-Geschwindigkeit $u(z)$. Durch Transformation in ein Bezugssystem, in welchem $u(z) = 0$ gilt, ist das System äquivalent zum System ohne äußere Kraft aus Kapitel 3.3 und strebt dadurch der Gleichgewichtsverteilung

$$f(\mathbf{v}) = (2\pi T)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2T}\right] \quad (4.44)$$

zu. Wir transformieren anschließend zurück in das ursprüngliche Bezugssystem mit $u(z) \neq 0$. Das Untersystem strebt folglich der Verteilungsfunktion

$$f^l(\mathbf{v}, z) = (2\pi T)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2T}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(z))^2\right] \text{ mit } \mathbf{u} := (u(z), 0, 0) \quad (4.45)$$

zu. Da wir die Annahme eines eigenständigen Untersystems getroffen haben, bezeichnen wir diese Verteilung als lokale Gleichgewichtsverteilung [8, S. 456 f.].

4.3.4 Die Bahnintegralmethode

Die Bahnintegralmethode [6, Kapitel 13.3] ist eine Möglichkeit die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ eines Systems näherungsweise zu bestimmen.

Um ein Gefühl für die Methode zu bekommen, betrachten wir als einführendes Beispiel eine Menge von $k(t)$ Teilchen zur Zeit t , welche aus drei Teilchentypen besteht. Die Teilchentypen werden durch ihre Eintrittszeiten in die betrachtete Menge kategorisiert. Typ i ist zur Zeit t_i durch einen Stoß in die betrachtete Menge gelangt. Sobald ein Teilchen stößt, verlässt es die betrachtete Menge. Nach Definition 3 ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen vom Typ i bis zum Zeitpunkt t noch nicht gestoßen hat durch $P(t - t_i)$ gegeben. Wir bezeichnen mit $k_i(t)$ die mittlere Anzahl der Teilchen vom Typ i , welche sich zum Zeitpunkt t in der betrachteten Menge befinden. Zum Zeitpunkt t_i seien $k_i(t_i)$ Teilchen in die betrachtete Menge eingetreten.

Da die Wahrscheinlichkeit in der betrachteten Menge ein Teilchen vom Typ i zu finden, auf die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Finden eines beliebigen Teilchens normiert sein muss, ist $k_i(t)$ durch

$$k_i(t) = k_i(t_i) \frac{P(t - t_i)}{\sum_j P(t - t_j)} \quad (4.46)$$

gegeben. Die Anzahl $k(t)$ der Teilchen zum Zeitpunkt t ist folglich

$$k(t) = \sum_i k_i(t) = \sum_i k_i(t_i) \frac{P(t - t_i)}{\sum_j P(t - t_j)}. \quad (4.47)$$

Nach diesem einführenden Beispiel betrachten wir nun die Teilchen in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) zur Zeit t . Die Bewegung dieser Teilchen sei stoßfrei und folgt somit den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Im Folgenden ist die Größe t' eine beliebige positive Zeitspanne. Zur Zeit $t_0 = t - t'$ waren alle betrachteten Teilchen in der Umgebung $d^3x_0 d^3v_0$ um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$. Dabei sind \mathbf{x}_0 und \mathbf{v}_0 durch die Angabe von $\mathbf{x}, \mathbf{v}, t'$ eindeutig bestimmt, d. h. es gilt

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = (\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t'), \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t')). \quad (4.48)$$

Wir wollen verstehen wie $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ entsteht. Dazu nehmen wir an, dass sich die Teilchen in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) stoßfrei durch den Phasenraum bewegt haben und an jedem Punkt dieser Bewegung Teilchen in die Umgebung gestoßen wurden. Durch Stöße verlassen Teilchen die betrachtete Umgebung wieder. Mathematisch können wir die Anzahl der Teilchen in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) durch eine kontinuierliche Darstellung von (4.47) beschreiben. In dieser gilt für die Anzahl der Teilchen in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) zur Zeit t

$$k(t) \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v. \quad (4.49)$$

Die grundlegende Annahme der Bahnintegralmethode ist, dass die zur Zeit t_0 in die Umgebung $d^3x_0 d^3v_0$ gestoßenen Teilchen der lokalen Gleichgewichtsverteilung $f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$ folgen. In Analogie zu (4.47) gilt folglich

$$k_i(t_i) \rightarrow f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) d^3x_0 d^3v_0. \quad (4.50)$$

Da $d^3x d^3v$ durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen aus $d^3x_0 d^3v_0$ hervorgeht, gilt die Relation (3.3), d. h.

$$d^3x_0 d^3v_0 = d^3x d^3v. \quad (4.51)$$

Alle möglichen Typen in $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, welche durch ihre Eintrittszeit t_0 charakterisiert sind, werden statt durch Summen über i und j durch Integrale über t_0 und \tilde{t} berücksichtigt.

In Abschnitt 3.2.1 haben wir hergeleitet, dass die Wahrscheinlichkeit eines Teilchens nicht zu stoßen mit der Zeit exponentiell abnimmt. Folglich haben Teilchen, welche zu einer Zeit t_0 mit $t_0 \ll t - \tau$ in die Umgebung $d^3x_0 d^3v_0$ um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ gestoßen wurden, keinen Einfluss auf die Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t , da sie mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit bereits wieder gestoßen haben und sich somit nicht mehr in der Umgebung $d^3x d^3v$ um (\mathbf{x}, \mathbf{v}) befinden. Die Wahl des Startzeitpunkts der Bewegung durch den Phasenraum ist daher physikalisch nicht relevant, solange $t_{start} \ll t - \tau$ gilt. Um ein mathematisch einfaches Problem zu erhalten wählen wir $t_{start} = -\infty$, sodass $-\infty < t_0 \leq t$ gilt. Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ wird analog zu (4.47) folglich durch

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v = \int_{-\infty}^t dt_0 f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \frac{P(t - t_0)}{\int_{-\infty}^t d\tilde{t} P(t - \tilde{t})} d^3x d^3v \quad (4.52)$$

beschrieben. Innerhalb der Relaxationszeit-Näherung ist nur eine mittlere Stoßzeit τ relevant und es gilt der in (3.14) abgeleitete Ausdruck für P , d. h.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_{-\infty}^t dt_0 f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \frac{e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}}{\int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\frac{1}{\tau}(t-\tilde{t})}} = \int_{-\infty}^t dt_0 f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t_0) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)}. \quad (4.53)$$

Mit Hilfe der Substitution

$$t' = t - t_0 \Rightarrow -dt' = dt_0 \quad (4.54)$$

erhalten wir daraus

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_0^\infty dt' f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t - t') \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t'}. \quad (4.55)$$

Die lokale Gleichgewichtsverteilung $f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t - t')$ hängt nach (4.48) auch über x_0 und v_0 von t' ab. Wir verwenden daher die mathematische Schreibweise

$$f^l(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t - t') = f^l[t']. \quad (4.56)$$

Somit gilt für die Verteilungsfunktion durch partielle Integration

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int_0^\infty dt' f^l[t'] \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t'} = -f^l[t'] e^{-\frac{1}{\tau} t'} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dt' \frac{df^l[t']}{dt'} e^{-\frac{1}{\tau} t'}. \quad (4.57)$$

Aus der Definition von \mathbf{x} und \mathbf{v} folgt $f^l[0] = f^l(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, sodass wir letztendlich zum Ausdruck

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f^l(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \int_0^\infty dt' \frac{df^l[t']}{dt'} e^{-\frac{1}{\tau} t'} \quad (4.58)$$

gelangen.

Mithilfe dieser Darstellung für $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ lässt sich $P_x(z)$ berechnen. Dieser Aufgabe widmen wir uns im nächsten Abschnitt.

4.3.5 Berechnung der Scherviskosität

Die folgende Berechnung der Scherviskosität orientiert sich an [6, S. 597 f.].

Um die gesuchte Verteilungsfunktion $f(z, \mathbf{v})$ des Systems aus Abschnitt 4.3.1 zu erhalten, müssen wir zuerst den Ausdruck $\frac{df^l[t']}{dt'}$ für dieses System berechnen. Dazu führen wir die Substitution $t' \rightarrow t - t_0$ durch:

$$\frac{df^l[t']}{dt'} = -\frac{df^l[t - t_0]}{dt_0} = -(2\pi T)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2T}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}(z_0))^2\right] \frac{d}{dt_0} \left(-\frac{1}{2T}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}(z_0))^2\right) \quad (4.59)$$

Dabei ist \mathbf{v}_0 die Geschwindigkeit und \mathbf{z}_0 der Ort aus der stoßfreien Bewegung, wodurch für diese die Newtonschen Bewegungsgleichungen gelten. Es wurde bereits erläutert, dass Teilchen, welche zur Zeit $t_0 \ll t - \tau$ in das Volumenelement $d^3x_0 d^3v_0$ gestoßen sind, sehr wahrscheinlich keinen Einfluss auf die Verteilungsfunktion $f(z, \mathbf{v})$ haben. $\frac{df^l[t']}{dt'}$ kann folglich für $t' \gg \tau$ näherungsweise in der Integration (4.58) vernachlässigt werden.

Im Folgenden beschreiben wir Teilchen, welche sich in der Zeitspanne vom letzten Stoß bis zum Zeitpunkt t an Orten mit der z -Koordinate größer $\frac{d}{2}$ befunden haben. Da diese Zeitspanne von der Größenordnung τ ist und sich die Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)$ befinden, muss dadurch

$$z - \langle |v_z| \rangle \tau \gg \frac{d}{2} \quad (4.60)$$

gelten. Für solche Teilchen nehmen die Newtonschen Bewegungsgleichungen in der Zeitspanne t' die Form

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt_0} = 0 \text{ und } \frac{d\mathbf{u}(z_0)}{dt_0} = \frac{\partial \mathbf{u}(z_0)}{\partial z_0} \frac{dz_0}{dt_0} = \frac{\partial \mathbf{u}(z_0)}{\partial z_0} v_z \quad (4.61)$$

an, insbesondere gilt

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v} = \text{const.} \quad (4.62)$$

Dadurch können wir $\frac{df^l[t']}{dt'}$ durch

$$\frac{df^l[t']}{dt'} = -\frac{1}{T} f^l(z_0, \mathbf{v})(v_x - u(z_0)) \frac{\partial u(z_0)}{\partial z_0} v_z \quad (4.63)$$

ausdrücken.

Wir machen die Annahme, dass sich ein Teilchen in der Zeitspanne t' für $t' \lesssim \tau$ in einem Bereich hinsichtlich der z -Koordinate aufhält, in dem $\frac{\partial u(z_0)}{\partial z_0}$ nahezu konstant ist, d. h.

$$\left| \frac{\partial^2 u(z_0)}{\partial z_0^2} \right| \langle |v_z| \rangle \tau \ll \left| \frac{\partial u(z_0)}{\partial z_0} \right| \quad (4.64)$$

gilt. Diese Annahme ist für kleine Störungen des Systems, d. h. Kräfte mit $F_0 \tau \ll \langle |v_x| \rangle$ hinreichend gut erfüllt. Dadurch gilt in der Zeitspanne t'

$$\frac{\partial u(z_0)}{\partial z_0} \approx \frac{\partial u(z)}{\partial z} \text{ und } u(z_0) \approx u(z) \quad (4.65)$$

und somit

$$\frac{df^l[t']}{dt'} \approx -\frac{1}{T} f^l(z, \mathbf{v})(v_x - u(z)) \frac{\partial u(z)}{\partial z} v_z. \quad (4.66)$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von t' , wodurch mit (4.58)

$$f(z, \mathbf{v}) = f^l(z, \mathbf{v}) - \frac{1}{T} f^l(z, \mathbf{v})(v_x - u(z)) \frac{\partial u(z)}{\partial z} v_z \tau \quad (4.67)$$

gilt. Dadurch haben wir die Möglichkeit einen Ausdruck für $P_x(z)$ zu erhalten:

$$P_x(z) = \int d^3v f(z, \mathbf{v}) v_z v_x = \int d^3v f^l(z, \mathbf{v}) v_z v_x - \left[\frac{\tau}{T} \int d^3v f^l(z, \mathbf{v}) (v_x - u(z)) v_z^2 v_x \right] \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (4.68)$$

Da das erste Integral verschwindet, gilt

$$P_x(z) = - \left[\frac{\tau}{T} \int d^3v f^l(z, \mathbf{v}) (v_x - u(z)) v_z^2 v_x \right] \frac{\partial u(z)}{\partial z}. \quad (4.69)$$

Wir können deshalb $P_x(z)$ in der Form

$$P_x(z) = -\eta \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (4.70)$$

mit

$$\eta = \frac{\tau}{T} \int d^3v f^l(z, \mathbf{v}) (v_x - u(z)) v_z^2 v_x \quad (4.71)$$

schreiben.

Definition 9 Gilt die Relation $P_x(z) \sim \frac{\partial u(z)}{\partial z}$, beschreibt η die Proportionalitätskonstante dieser Relation. η wird als Scherviskosität bezeichnet [6, S. 554 ff.].

Der im System stattfindende Transport von x -Impuls in z -Richtung von der Kraftschicht in den übrigen Teil des Systems wird folglich unter anderem durch die physikalische Größe der Scherviskosität charakterisiert. Bei der Scherviskosität handelt es sich um einen Transportkoeffizienten.

In der Herleitung der Gleichung (4.70) haben wir zahlreiche Annahmen gemacht. Die dabei wichtigste Annahme ist, dass die äußere Kraft in der Kraftschicht nur eine kleine Störung des Systems ohne äußere Kraft darstellt. Diese Störung des Systems hat einen x -Geschwindigkeitsgradienten im System, d. h. den Term $\frac{\partial u(z)}{\partial z}$ zur Folge. Aufgrund des Konzepts der Linear Response, sollte $\frac{\partial u(z)}{\partial z}$ proportional zur Störung des Systems sein. Man kann davon ausgehen, dass die Störung proportional zur Kraft F_0 und zur Dicke d der Kraftschicht ist. Da aufgrund von Gleichung (4.40) $P_x(z) \sim F_0 d$ gilt, ist das Ergebnis $P_x(z) \sim \frac{\partial u(z)}{\partial z}$ und die Tatsache, dass es sich bei der Proportionalitätskonstanten um einen Transportkoeffizienten handelt, deshalb nicht verwunderlich.

Abschließend wollen wir die explizite Form von η erhalten und führen dazu die neue Variable

$$U = v_x - u(z) \quad (4.72)$$

ein. Mit dieser nimmt die lokale Gleichgewichtsverteilung die Form

$$f^l(U, v_y, v_z) = (2\pi T)^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2T} (U^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] \quad (4.73)$$

an und es gilt die Relation

$$\frac{\partial f^l(U, v_y, v_z)}{\partial U} = -\frac{1}{T} f^l(U, v_y, v_z) U. \quad (4.74)$$

Dadurch gilt für die Scherviskosität

$$\eta = -\tau \int d^3v \frac{\partial f^l(U, v_y, v_z)}{\partial U} v_z^2 v_x = -\tau \int dv_z v_z^2 \int dv_y \int dv_x \frac{\partial f^l(U, v_y, v_z)}{\partial U} v_x. \quad (4.75)$$

Wir führen einen Variablenwechseln von v_x nach U durch und erhalten mit Hilfe partieller Integration

$$\int dv_x \frac{\partial f^l(U, v_y, v_z)}{\partial U} v_x = \int dU \frac{\partial f^l(U, v_y, v_z)}{\partial U} (U + u) = - \int dU f^l(U, v_y, v_z). \quad (4.76)$$

Dadurch erhalten wir für die Scherviskosität

$$\eta = \tau \int dv_z v_z^2 \int dv_y \int dU f^l(U, v_y, v_z) = \tau T. \quad (4.77)$$

Physikalisch macht dieses Ergebnis Sinn: Ein Teilchen hat im Mittel die Geschwindigkeit $\langle |v_z| \rangle$ in positive z -Richtung. Nach einem Stoß in einer Schicht nimmt ein Teilchen im Mittel die x -Geschwindigkeit an, welche in dieser vorherrscht. Bei einem Stoß gibt ein Teilchen folglich im Mittel x -Impuls ab, da die mittlere x -Geschwindigkeit in den Schichten mit positiver z -Richtung abnimmt. Das Teilchen kann also x -Impuls schneller in positive z -Richtung transportieren, wenn es auf dem Weg möglichst selten stößt. Ein Maß für den stoßfrei zurückgelegten Weg in positive z -Richtung ist die mittlere freie Weglänge in z -Richtung \bar{l}_z . Diese kann durch

$$\bar{l}_z = \langle |v_z| \rangle \tau \quad (4.78)$$

beschrieben werden. Der mittlere z -Geschwindigkeitsbetrag wird durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschrieben, sodass

$$\langle |v_z| \rangle \sim \sqrt{T} \quad (4.79)$$

gilt. Außerdem erfolgt der x -Impulstransport schneller, wenn der mittlere z -Geschwindigkeitsbetrag des Teilchens höher ist. Für den x -Impulsfluss in z -Richtung gilt daher

$$P_x(z) \sim \bar{l}_z \langle |v_z| \rangle = \langle |v_z| \rangle^2 \tau \sim \tau T. \quad (4.80)$$

Nach dieser Beschreibung des Systems mit der Voraussetzung klassischer Teilchen, erfolgt im nächsten Abschnitt die Untersuchung des Systems für ein zweikomponentiges Fermigas.

4.4 Die Spin-Scherviskosität

4.4.1 Mikroskopische Betrachtung und die Zerfallslänge

Wir betrachten das in Kapitel 2 beschriebene System. Die Kraftschicht sei so dünn, dass Teilchen beim Durchqueren dieser mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht stoßen. Für die Dicke der Kraftschicht d gilt folglich wie zuvor

$$d \ll \langle |v_z| \rangle \tau. \quad (4.81)$$

Wir unterteilen unser System wieder in zur Kraftschicht parallele Messschichten, welche aber in diesem Fall die gleiche Dicke d wie die Kraftschicht haben. Teilchen, deren Ort eine negative bzw. positive z-Komponente aufweist, haben die Möglichkeit die Kraftschicht von unten nach oben bzw. von oben nach unten zu durchdringen und damit x-Impuls zu transportieren. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Transport von x-Impuls in den Halbraum über der Kraftschicht, da der Transport in den Halbraum unterhalb der Kraftschicht aufgrund der Symmetrie des Systems analog beschrieben werden kann.

Wir betrachten ein Teilchen mit Spin s , welches sich zur Zeit t am Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)$ mit $z > \frac{d}{2}$ befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Teilchen eine Geschwindigkeit in der Umgebung dv_z hat ist durch

$$P(v_z)dv_z = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2T}v_z^2\right) dv_z \quad (4.82)$$

gegeben. Wir nehmen an, dass ein Teilchen nach einem Stoß für den mittleren x-Impuls in einer Messschicht keine Relevanz hat. Der letzte Stoß des betrachteten Teilchens habe im Zeitintervall dt_0 um t_0 am Ort $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ stattgefunden, wobei die Wahrscheinlichkeit $P(z_0)dz_0$ hierfür mit (3.15) innerhalb der Relaxationszeit-Näherung durch

$$P(z_0)dz_0 = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{z-z_0}{\tau v_z}\right) dt_0 = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{z-z_0}{\tau v_z}\right) \frac{dz_0}{v_z} \quad (4.83)$$

gegeben ist. Damit das Teilchen in der Kraftschicht x-Impuls aufnehmen kann muss $z_0 < -\frac{d}{2}$ und $v_z > 0$ gelten, d. h. das Teilchen hat die Kraftschicht von unten nach oben durchquert ohne auf dem Weg von z_0 bis z zu stoßen. Das Teilchen hat sich dann in einer Zeitspanne der Länge $\frac{d}{v_z}$ in der Schicht aufgehalten und dadurch den x-Impuls $p_{s,x} = sF_0 \frac{d}{v_z}$ aufgenommen. Dabei vernachlässigen wir aufgrund der Voraussetzung (4.81) die Fälle, in denen das betrachtete Teilchen das letzte Mal in der Kraftschicht gestoßen hat. Für den Erwartungswert der x-Geschwindigkeit $u_s(z)$ unseres betrachteten Teilchens mit Spin s gilt somit

$$u_s(z) = \int_{v_z > 0} dv_z \int_{-\infty}^0 dz_0 P(z_0)P(v_z)p_{s,x} \quad (4.84)$$

bzw.

$$u_s(z) = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} sF_0 d \int_{v_z > 0} dv_z \frac{1}{v_z} \exp\left(-\frac{1}{2T}v_z^2\right) \int_{-\infty}^0 dz_0 \frac{1}{\tau v_z} \exp\left(-\frac{z-z_0}{\tau v_z}\right) dz_0. \quad (4.85)$$

Durch Berechnung des zweiten Integrals erhält man

$$u_s(z) = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} sF_0 d \int_{v_z > 0} dv_z \frac{1}{v_z} \exp\left(-\frac{1}{2T}v_z^2\right) \exp\left(-\frac{z}{\tau v_z}\right). \quad (4.86)$$

Aufgrund der Symmetrie des Systems folgt daraus

$$u(z) = \frac{u_\uparrow - u_\downarrow}{2} = (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} F_0 d \int_{v_z > 0} dv_z \frac{1}{v_z} \exp\left(-\frac{1}{2T}v_z^2\right) \exp\left(-\frac{z}{\tau v_z}\right). \quad (4.87)$$

Der allgemeine Verlauf dieser nicht analytischen Funktion ist in Abbildung (8) visualisiert.

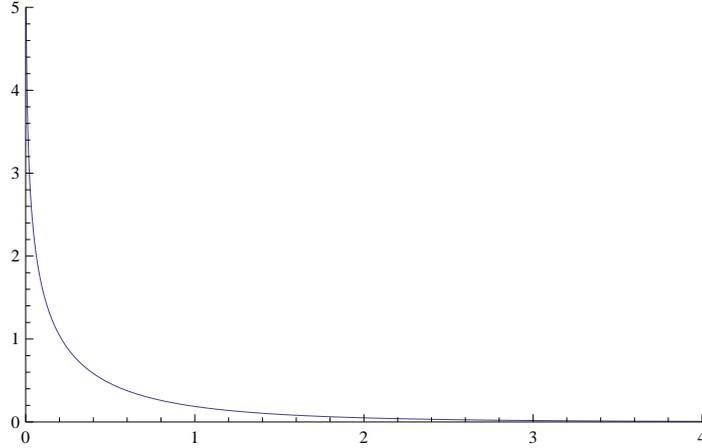


Abbildung 8: Darstellung der Funktion $f(z) = \int_0^\infty dx \frac{1}{x} \exp(-x^2) \exp(-\frac{z}{x})$, welche das prinzipielle Verhalten von $u(z)$ beschreibt.

Wir wollen eine Näherung für $u(z)$ finden, welche für Messschichten an Orten mit $z \gg \tau \langle |v_z| \rangle$ gilt. Da Teilchen mit einem z -Geschwindigkeitsbetrag $|v_z| \gg \langle |v_z| \rangle$ äußerst selten sind und diese aufgrund der kurzen Aufenthaltsdauer in der Kraftschicht nur einen geringen x -Impuls transportieren, ist der Effekt des x -Impulstransportes durch schnelle Teilchen in die Schicht um z vernachlässigbar. Der Großteil des x -Impulses in einer Messschicht um z hat seinen Ursprung in Teilchen, deren letzte Stoßzeit weit über der mittleren Stoßzeit τ liegt. Wir machen die Näherung, dass alle Teilchen, welche x -Impuls in eine Messschicht mit $z \gg \tau \langle |v_z| \rangle$ transportiert haben, den z -Geschwindigkeitsbetrag $\langle |v_z| \rangle$ haben. Diese Näherung wird in die Funktion $u(z)$ implementiert, indem im Integral der Term

$$\frac{F_0 d}{v_z} \exp\left(-\frac{z}{\tau v_z}\right) \approx \frac{F_0 d}{\langle |v_z| \rangle} \exp\left(-\frac{z}{\tau \langle |v_z| \rangle}\right) \quad (4.88)$$

verändert wird. Die Funktion $\exp\left(-\frac{z}{\tau \langle |v_z| \rangle}\right)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen, welches im Mittel den z -Geschwindigkeitsbetrag $\langle |v_z| \rangle$ hat, ohne zu stoßen vom Bereich unter der Kraftschicht bis zum Ort z bewegt hat. $\frac{F_0 d}{\langle |v_z| \rangle}$ drückt den im Mittel in der Kraftschicht erhaltenen x -Impulsbetrag des Teilchens aus. Um die Normierung der Wahrscheinlichkeit sicherzustellen, bleibt der Term $\exp\left(-\frac{1}{2T} v_z^2\right)$ unberührt. Daraus resultiert

$$u(z) \approx (2\pi T)^{-\frac{1}{2}} \frac{F_0 d}{\langle |v_z| \rangle} \exp\left(-\frac{z}{\tau \langle |v_z| \rangle}\right) \int_{v_z > 0} dv_z \exp\left(-\frac{1}{2T} v_z^2\right) = \frac{1}{2} \frac{F_0 d}{\langle |v_z| \rangle} \exp\left(-\frac{z}{\tau \langle |v_z| \rangle}\right). \quad (4.89)$$

Für die durchgeführten Näherungen war die Tatsache, dass wir nur Messschichten an Orten $z \gg \tau \langle |v_z| \rangle$ betrachten essentiell. In den Messschichten nahe der Kraftschicht befinden sich Teilchen, welche den Weg von unterhalb der Kraftschicht bis zur Messschicht stoßfrei durchquert haben, aber einen niedrigen z -Geschwindigkeitsbetrag aufweisen, d. h. $|v_z| \ll \langle |v_z| \rangle$. Diese Teilchen haben sich langsam bewegt und führen einen vergleichsweise hohen x -Impuls mit sich. Sie können folglich nicht mehr vernachlässigt werden. Daraus resultiert, dass die exakte Funktion $u(z)$ für $z \lesssim \tau \langle |v_z| \rangle$ stark von der Näherung durch die Exponentialfunktion abweicht.

Das Verhalten von $u(z)$ kann für $z \gg \tau \langle |v_z| \rangle$ durch die sogenannte Zerfallslänge κ qualitativ beschrieben werden:

$$u(z) \sim \exp\left(-\frac{1}{\kappa} z\right) \quad (4.90)$$

Für unser System gilt folglich $\kappa = \tau \langle |v_z| \rangle = \bar{l}_z$, wobei \bar{l}_z die mittlere freie Weglänge in z -Richtung darstellt. Für die Zerfallslänge gilt somit

$$\kappa \sim \tau \sqrt{T}. \quad (4.91)$$

Dieses Verhalten wird später durch die numerische Beschreibung des Systems überprüft.

Wir haben bisher angenommen, dass sowohl die Temperatur als auch die mittlere Stoßzeit zeitlich konstante Größen sind. Äquivalent zum Abschnitt über den Spin-Drage ist dies für eine hinreichend kleine Störung des Systems im Vergleich zum System ohne äußere Kraft und eine relativ kurze Beobachtungsdauer des Systems erfüllt. Da die äußere Kraft nicht im ganzen System wirkt, kann man annehmen, dass die Bedingung einer kleinen Störung für $F_0\tau\frac{d}{L} \ll \langle |v_x| \rangle$ gilt. Ist diese erfüllt, entspricht die mittlere Stoßzeit im System der mittleren Stoßzeit im System ohne äußere Kraft.

Nun wollen wir einen Ausdruck für den x-Impulsfluss in z-Richtung für das behandelte System finden.

4.4.2 Impulsfluss und Spin-Scherviskosität

Wir betrachten den x-Impulsfluss in z-Richtung durch eine Ebene $z = \text{const.}$ mit $z \gg \tau\langle |v_z| \rangle$. Dabei sind nur Teilchen mit $v_z > 0$ von Bedeutung, da andere keinen x-Impuls mitführen. Im Mittel durchströmen in der Zeiteinheit dt alle Teilchen im Volumenelement $\langle |v_z| \rangle dt A$ die Ebene mit Fläche A . Der gesamte in der Zeiteinheit dt durch die Fläche A transportierte x-Impuls bezogen auf Teilchen mit Spin s ist somit durch

$$P_{s,x}(z)dtA = \frac{1}{2}s\langle |v_z| \rangle dt Au(z) \quad (4.92)$$

gegeben. Mit Hilfe der Relation

$$u(z) = -\tau\langle |v_z| \rangle \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (4.93)$$

gilt somit

$$P_{s,x}(z) = -\frac{1}{2}s\tau\langle |v_z| \rangle^2 \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad (4.94)$$

bzw.

$$P_{s,x}(z) = -s\eta_s \frac{\partial u(z)}{\partial z} \quad \text{mit} \quad \eta_s = \frac{1}{2}\tau\langle |v_z| \rangle^2. \quad (4.95)$$

Äquivalent zum einkomponentigen System kann folgende Definition formuliert werden.

Definition 10 Gilt die Relation $P_{s,x}(z) \sim s\frac{\partial u(z)}{\partial z}$, beschreibt η_s die Proportionalitätskonstante dieser Relation. η_s wird als Spin-Scherviskosität bezeichnet.

In Abschnitt 4.3.5 haben wir die Scherviskosität physikalisch erklärt. Diese Anschauung ist äquivalent auf die Spin-Scherviskosität übertragbar, sodass es nicht verwunderlich ist, dass aufgrund der Relation $\langle |v_z| \rangle^2 \sim T$

$$\eta_s \sim T\tau \quad (4.96)$$

gilt.

Auch die Erklärung der Proportionalitätsrelation mit dem Konzept der Linear Response ist auf die Spin-Scherviskosität übertragbar.

Nach der theoretischen Behandlung unseres Systems in den vorangegangenen Kapiteln beschäftigen wir uns im zweiten Teil der Arbeit mit der Untersuchung des Systems mittels einer Computersimulation.

5 Numerische Analyse

5.1 Die Computersimulation - Grundlagen und Aufbau

5.1.1 Verteilungsfunktion und Testteilchen

Die folgenden Abschnitte orientieren sich an [2].

Die numerische Modellierung des Systems aus Kapitel 2 ohne wirkende Kraft wurde von meiner Betreuerin Dr. Olga Goulko implementiert [2]. Die Grundideen dieser Computersimulation sind die folgenden:

Da wir das System semiklassisch beschreiben, hat jedes Teilchen zu jedem Zeitpunkt t einen Ort und einen Impuls und bewegt sich auf einer durch die klassische Mechanik beschriebenen Bahn. Zwei Teilchen stoßen wenn die klassische Stoßbedingung

$$\pi d_{min}^2 < \sigma \quad (5.1)$$

erfüllt ist. Dabei ist d_{min} der durch die Newtonschen Bewegungsgleichungen gegebene, minimal mögliche Abstand zwischen den zwei Teilchen und σ der quantenmechanische totale Wirkungsquerschnitt aus (2.6).

Die Verteilungsfunktion $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ wird innerhalb der Computersimulation durch δ -Funktionen approximiert, d. h.

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \approx \tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{N_s}{\tilde{N}_s} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_s} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \delta^{(3)}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)). \quad (5.2)$$

Für jedes Teilchen mit Spin s existieren dabei 10 sogenannte Testteilchen, um die Genauigkeit dieser Näherung zu steigern. \tilde{N}_s ist die Anzahl dieser Testteilchen, d. h.

$$\tilde{N}_s = 10N_s. \quad (5.3)$$

In der Approximation der Verteilungsfunktion sind $\mathbf{x}_i(t)$ und $\mathbf{v}_i(t)$ der Ort und die Geschwindigkeit eines Testteilchens i mit Spin s . Die Form von $\tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ist so gewählt, dass die Normierung der Verteilungsfunktion erfüllt ist:

$$\int d^3x \int d^3v \tilde{f}_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = N_s \quad (5.4)$$

Durch die Einführung der Testteilchen verändern sich physikalische Größen. Der neue totale Wirkungsquerschnitt $\tilde{\sigma}$ lässt sich in der Form

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{N}{\tilde{N}} \quad (5.5)$$

darstellen und die klassische Streubedingung (5.1) verändert sich zu

$$\pi d_{min}^2 < \tilde{\sigma}, \quad (5.6)$$

wobei sich d_{min} nun auf zwei Testteilchen bezieht. Dabei haben wir die Notation $\sum_s \tilde{N}_s = \tilde{N}$ verwendet.

Im Folgenden behandeln wir die numerische Zeitentwicklung des Systems unter Beachtung von Stößen.

5.1.2 Zeitentwicklung und Stöße

Zu Beginn der Simulation werden die Teilchen nach der Maxwell-Boltzmann-Verteilung anhand einer vorgegebenen Temperatur initialisiert. Wie in der numerischen Simulation physikalischer Systeme üblich, entwickelt sich das System in Zeitschritten Δt , d. h. die Zeit wird diskretisiert. Während Δt bewegen sich alle Teilchen ohne Stöße nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Nach jedem Zeitschritt werden die Stöße berechnet und ausgeführt. Da jedes Teilchen mit Spin s mit allen Teilchen mit Spin \bar{s} stoßen kann, müssen theoretisch zu jedem Zeitpunkt t_i alle $\frac{\tilde{N}_s \tilde{N}_{\bar{s}}}{2} = \frac{\tilde{N}^2}{8} \sim \tilde{N}^2$ Teilchenpaare hinsichtlich dem Erreichen von d_{min} und dem Erfüllen der klassischen Streubedingung (5.6) untersucht werden. Man kann diesen großen Rechenaufwand umgehen, wenn man beachtet, dass $\tilde{\sigma}$ beschränkt ist:

$$0 \leq \tilde{\sigma} < \frac{N}{\tilde{N}} 4\pi a^2 \quad (5.7)$$

Nach der klassischen Streubedingung (5.6) ist der maximale Abstand, den Teilchen für eine Streuung haben dürfen, durch $d_{max} = 2a\sqrt{\frac{N}{N}} = \sqrt{0.4}a$ gegeben.

Wir unterteilen das System in ein Gitter, dessen Elementarzelle einen Würfel der Kantenlänge d_{max} darstellt. Betrachten wir ein Teilchen T mit Spin s , so befindet sich dieses zu einem bestimmten Zeitpunkt t_i in einer bestimmten Zelle Z. Ein Stoß von T ist zu diesem Zeitpunkt nur mit Teilchen der Teilchensorte \bar{s} möglich, welche sich in dem kugelförmigen Volumen $\frac{4}{3}\pi d_{max}^3$ um T befinden. Dieses Volumen wird durch die 26 um Z verteilten Zellen und der Zelle Z vollständig abgedeckt. Um die möglichen Stöße von T zu berechnen ist es daher ausreichend in jedem Zeitschritt nur die Teilchen in der Zelle Z und den umliegenden Zellen zu betrachten, wodurch der Rechenaufwand deutlich reduziert wird.

Dabei haben wir nicht beachtet, dass sich die Teilchen in Δt bewegen und es somit zu Situationen kommen kann, in welchen Stöße mit Beteiligung sehr schneller Teilchen nicht beachtet werden. Um diesen Fehler zu minimieren wird Δt klein und d_{max} größer als $\sqrt{0.4}a$ gewählt.

Im Folgenden wollen wir die numerische Umsetzung des Stoßvorgangs zweier Teilchen A und B, welche wie in Abschnitt 3.2.2 definiert sind, genauer betrachten. Zwei Teilchen stoßen zum Zeitpunkt t_i , wenn der minimale Abstand d_{min} zwischen A und B zum Zeitpunkt $t_{min} \in \left[t_i - \frac{\Delta t}{2}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right]$ erreicht wird. Ist diese Bedingung erfüllt, werden die Teilchen um Δt_{min} zum Zeitpunkt des minimalen Abstands propagiert, stoßen dort und werden um Δt_{min} zum ursprünglichen Zeitpunkt t_i zurückpropagiert. In (3.22) bzw. (3.18) haben wir bereits die Relativ- und Schwerpunktschwindigkeitserhaltung gezeigt. Beruht die Wechselwirkung zwischen A und B zusätzlich, wie wir im Folgenden annehmen wollen, auf einem rotationsymmetrischen Potential, lässt sich leicht zeigen, dass auch der relative Drehimpuls vor bzw. nach dem Stoß

$$\mathbf{L}_{rel} = \mathbf{X} \times \mathbf{V} \text{ bzw. } \mathbf{L}'_{rel} = \mathbf{X}' \times \mathbf{V}' \quad (5.8)$$

eine Erhaltungsgröße darstellt, d. h.

$$\mathbf{L}_{rel} = \mathbf{L}'_{rel}. \quad (5.9)$$

Dabei haben wir die Relativkoordinaten vor bzw. nach dem Stoß

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_2 \text{ bzw. } \mathbf{X}' = \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2, \quad (5.10)$$

die den Ort des Teilchens A im Ruhesystem von Teilchen B beschreiben, verwendet. Falls $\mathbf{L}_{rel} \neq 0$ ist, existiert folglich eine Ebene aufgespannt durch \mathbf{X} und \mathbf{V} , in der sich sowohl \mathbf{X}' als auch \mathbf{V}' befinden müssen. Wir haben bereits gezeigt, dass \mathbf{V}' durch eine Drehung aus \mathbf{V} hervorgeht. Zusätzlich ist nun die Drehachse, nämlich \mathbf{L}_{rel} festgelegt. Im Fall $\mathbf{L}_{rel} \neq 0$ wird der Drehwinkel in der Simulation zufällig bestimmt. Da sich $|\mathbf{X}|$ nicht verändern soll, wird \mathbf{X}' um die selbe Drehachse und um den selben Winkel gedreht. Außerdem soll der Schwerpunkt \mathbf{S} während der Drehung erhalten sein. Da sich die Ortskoordinaten nach dem selben Schema wie die Geschwindigkeitskoordinaten durch Schwerpunkt und Relativkoordinaten beschreiben lassen, sind die neuen Koordinaten $(\mathbf{x}'_1, \mathbf{v}'_1)$ und $(\mathbf{x}'_2, \mathbf{v}'_2)$ durch die geforderten Erhaltungseigenschaften eindeutig festgelegt. Im Fall $\mathbf{L}_{rel} = \mathbf{0}$ werden zwei Drehwinkel zufällig bestimmt und die selben Erhaltungseigenschaften gefordert.

Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit erläutert, die richtige Größe des Zeitschritts Δt abzuschätzen.

5.1.3 Bestimmung des Zeitschritts

Im vorherigen Abschnitt wurde erwähnt, dass durch die Unterteilung des Systems in Zellen Teilchen nicht beachtet werden. Bei Stößen zwischen Teilchen mit hohen Relativgeschwindigkeitsbeträgen können sich diese vor und nach dem Zeitschritt in nicht benachbarten Zellen befinden. Diese Stöße werden somit nicht berücksichtigt. Da für hohe Relativgeschwindigkeitsbeträge der totale Wirkungsquerschnitt klein ist, spielt der Fehler keine zu große Rolle, ist aber trotzdem nicht vernachlässigbar.

Je kleiner der Zeitschritt, desto größer ist der Relativgeschwindigkeitsbetrag von Teilchen, die nicht berücksichtigt werden. Der Zeitschritt darf aber nicht zu klein gewählt werden, denn dadurch entwickelt sich das System sehr langsam, wodurch der Zeitaufwand je Simulation ansteigt. Außerdem können bei einem zu kleinen Zeitschritt Teilchen in mehreren aufeinanderfolgenden Zeitschritten wechselwirken, sodass sich mehr Stöße ergeben, als eigentlich vorkommen.

Im System ohne äußere Kraft ist es mit Hilfe von Mathematica möglich den theoretischen Wert für die Streurrate γ mittels (3.46) zu berechnen. Wir führen deswegen die Simulation für unterschiedliche Zeitschritte durch und vergleichen die Streurrate aus der Simulation mit der theoretisch berechneten Streurrate. Der Zeitschritt sei im Folgenden so klein gewählt, dass die Abweichung der Streurrate in der Simulation von der theoretischen Streurrate weniger als 2% beträgt.

5.1.4 Einheiten in numerischen Systemen

Prinzipiell arbeitet die Simulation mit einheitenlosen Zahlen. Die Messergebnisse sollten deshalb keine Einheiten aufweisen, d. h. durch Größen ausgedrückt werden, welche die selbe Einheit besitzen. Mögliche Skalen zu verschiedenen physikalischen Größen sind in Tabelle (1) aufgeführt.

Physikalische Größe	Mögliche Skala	Wert der Skala
Energie	Fermi-Energie E_F	$E_F = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}}$
Temperatur	Fermi-Temperatur T_F	$T_F = E_F = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}}$
Länge	inverser Fermi-Wellenvektor $\frac{1}{k_F}$	$\frac{1}{k_F} = \frac{1}{\sqrt{2E_F}} = (3\pi^2)^{-\frac{1}{3}}$
Geschwindigkeit	Fermi-Geschwindigkeit v_F	$v_F = \sqrt{2E_F} = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}}$
Zeit	Fermi-Zeit t_F	$t_F = \frac{1}{k_F v_F} = (3\pi^2)^{-\frac{2}{3}}$
Kraft	Fermi-Kraft F_F	$F_F = \frac{v_F}{t_F} = (3\pi^2)$

Tabelle 1: Mögliche Skalen physikalischer Größen, für die Werte $n = m = 1$ [3]

5.2 Bestimmung des Spin-Drags

5.2.1 Vorgehensweise

Es soll die Abhängigkeit des Spin-Drags von Temperatur und mittlerer Stoßzeit untersucht werden. Dazu wird das in Abschnitt 4.2.1 beschriebene System numerisch analysiert.

Für die stoßfreie Bewegung der Teilchen sind in der Computersimulation die Newtonschen Bewegungsgleichungen implementiert. Diese werden um den Einfluss der Kraft (2.4) mit $d = L$ erweitert. Die Simulation enthält einen Algorithmus, der die mittleren x-Geschwindigkeiten $u_{\uparrow}(t_j)$ und $u_{\downarrow}(t_j)$ der beiden Teilchensorten zu jedem Zeitpunkt t_j in eine Datei ausgibt. Daraus kann mit Hilfe von (4.17) $u(t_j)$ berechnet werden. Die mittlere Streurrate wird am Ende der Simulation berechnet und in eine Datei ausgegeben.

In Abschnitt 4.2.1 wurde gezeigt, dass sich für ausreichend kleine Kräfte F_0 stationäre Zustände einstellen, deren Streurrate näherungsweise durch die Formel für die Streurrate im System ohne äußere Kraft (3.46) berechnet werden kann. Mit Hilfe von Mathematica wird die Streulänge a für eine bestimmte Temperatur T so gewählt, dass für jeden Wert der mittleren Stoßzeit $\frac{\tau t_F}{t_F} \in \{9.57, 10.63, 11.96, 13.67\}$ 10 verschiedene Werte für die Temperatur $\frac{T}{T_F} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ möglich sind. Zu jedem der 40 Parameterpaare (τ, T) ergibt sich ein Messwert.

Anschließend muss ein passender Wert für die Kraft F_0 gewählt werden, sodass sich ein stationärer Zustand einstellt und die Streurrate aus dem System ohne Kraft der Streurrate in diesem System entspricht. Dazu muss nach Abschnitt 4.2.2 $\langle |v_x| \rangle \gg F_0 \tau$ gelten. Sind die Voraussetzungen für einen stationären Zustand erfüllt, steigt u zuerst stark an und erreicht nach kurzer Zeit einen konstanten Wert. Da u eine statistische Größe ist, erwarten wir Fluktuationen dieser. Die Kraft F_0 muss groß genug sein, um ein u hervorzurufen welches sich deutlich von seinen Fluktuationen unterscheidet. Der Wert $\frac{F_0}{F_F} \approx 0.0034$ erfüllt alle Voraussetzungen und wird im Folgenden als Parameter verwendet. Insbesondere gilt für dieses F_0 und die gewählten Parameterpaare (τ, T)

$$\left(\frac{\langle |v_x| \rangle}{F_0 \tau} \right)_{min} \approx 12.2 \gg 1. \quad (5.11)$$

Dass die sorgfältige Wahl des Parameters F_0 wichtig war, zeigt die Darstellung von $u(t)$ und der dazugehörigen Streurrate $\gamma(t)$ in Abbildung (9). Dabei wurden die Parameter so initialisiert, dass $\frac{\langle |v_x| \rangle}{F_0 \tau} \ll 1$ gilt. In Abschnitt 4.2.2 wurde erklärt, dass die Streurrate in einem nicht-stationären Zustand abnimmt. Dies wird durch Abbildung (9) bestätigt.

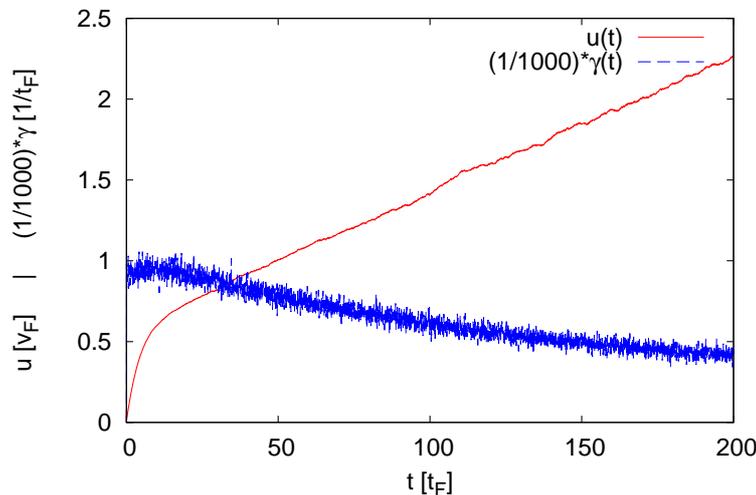


Abbildung 9: Nicht-stationärer Zustand - $u(t)$ strebt keinem konstanten Wert zu und $\gamma(t)$ verringert sich mit der Zeit.

Zu jedem Parameterpaar (τ, T) werden 50 Simulationen durchgeführt, um die Fluktuationen von $u(t)$ zu reduzieren. In Abbildung (10) ist $u_i(t)$ für eine dieser Simulationen i dargestellt. Wie die Theorie zeigt, steigt $u_i(t)$ zuerst stark an und fluktuiert nach kurzer Zeit um einen konstanten Wert. Ein von mir geschriebenes Programm berechnet für jeden Zeitpunkt t_j den Mittelwert \bar{u} aus allen 50 Simulationen, d. h.

$$\bar{u}(t_j) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} u_i(t_j). \quad (5.12)$$

Die Fluktuationen von $\bar{u}(t)$ sind im Vergleich zu denen von $u_i(t)$ deutlich verringert, wie sich in Abbildung (10) zeigt. Außerdem berechnet das Programm den Mittelwert der Streurrate und dessen Fehler aus den 50 Simulationen. Der konstante Wert, um den $\bar{u}(t)$ nach kurzer Zeit fluktuiert, wird durch eine Mittelung von $\bar{u}(t)$ über die Zeit berechnet. Dazu wird der starke Anstieg zu Beginn der Simulation nicht berücksichtigt, d. h. es wird ein Zeitwert, der sogenannte Cut-Off t_{CO} , festgelegt, ab dem die zeitliche Mittelung beginnt. Den Wert des Cut-Offs kann man durch Betrachtung des Verlaufs von $u(t)$ abschätzen. Nach der zeitlichen Mittelung erhält man den Mittelwert $\langle \bar{u} \rangle_t$, welcher für ein bestimmtes Parameterpaar in Abbildung (10) visualisiert ist.

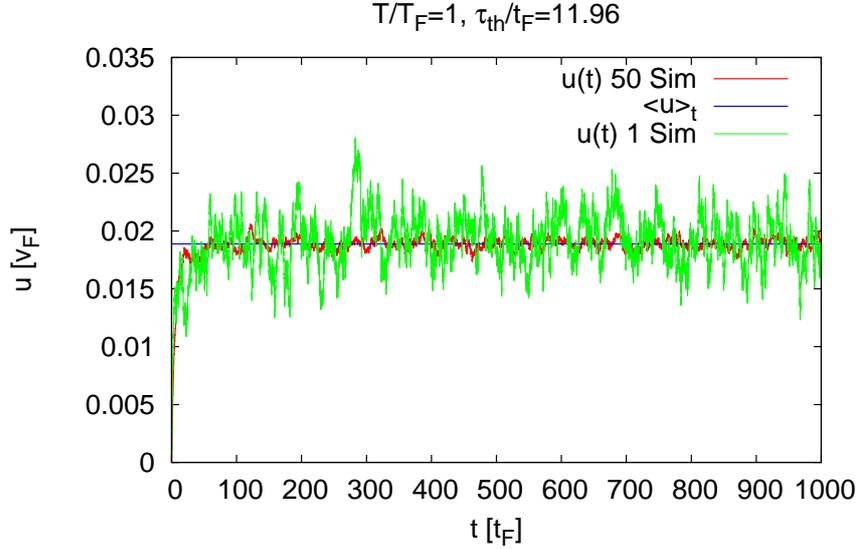


Abbildung 10: $\bar{u}(t)$, $u_i(t)$ und der zeitliche Mittelwert $\langle \bar{u} \rangle_t$

Neben dem zeitlichen Mittelwert $\langle \bar{u} \rangle_t$ berechnet das Programm auch dessen Fehler, mit der Annahme, dass die Messpunkte $\bar{u}(t_j)$ statistisch unabhängig sind. Tatsächlich sind die Messpunkte nicht statistisch unabhängig, wodurch der Fehler stark unterschätzt ist. Deswegen wird für einzelne Parameterpaare (τ, T) eine sogenannte Blocking-Analyse durchgeführt [5]. In dieser werden jeweils n benachbarte Messwerte zu einem sogenannten Block zusammengefasst. Anschließend wird der Mittelwert aller Messwerte in einem Block berechnet und dieser als neuer Messpunkt übernommen. Aus diesen neuen Messwerten wird ein Mittelwert und der Fehler des Mittelwerts berechnet. Bei korrelierten Messwerten zeigt der Fehler das in Abbildung (11) visualisierte Verhalten. Mit wachsendem n steigt er zuerst stark an, erreicht aber ab einer bestimmten Größenordnung von n ein Plateau. Man geht davon aus, dass für die Größenordnung von n , ab der das Plateau erreicht wird, die aus den Blöcken resultierenden Messwerte nicht mehr korreliert sind. Das Plateau spiegelt folglich den tatsächlichen Fehler von $\langle \bar{u} \rangle_t$ wieder. Bei den getesteten Parameterpaaren beträgt der tatsächliche Fehler von $\langle \bar{u} \rangle_t$ das 5- bis 20-fache des Fehlers, welchen man durch die Annahme unkorrelierter Messwerte erhält. Die unkorrelierten Fehler werden deshalb im Folgenden mit dem Faktor 20 multipliziert.

Für den Spin-Drag gilt mit Hilfe von Gleichung (4.14) und (4.17)

$$\Gamma_{SD} = \frac{F_0}{2\langle \bar{u} \rangle_t}. \quad (5.13)$$

Da F_0 nicht fehlerbehaftet ist, erhält man den Fehler des Spin-Drags aus dem Fehler von $\langle \bar{u} \rangle_t$. Für jedes der 40 Parameterpaare (τ, T) wird der Spin-Drag und dessen Fehler berechnet.

Im Anschluss wird die Abhängigkeit des Spin-Drags von der Temperatur und der mittleren Stoßzeit untersucht und mit der Theorie verglichen.

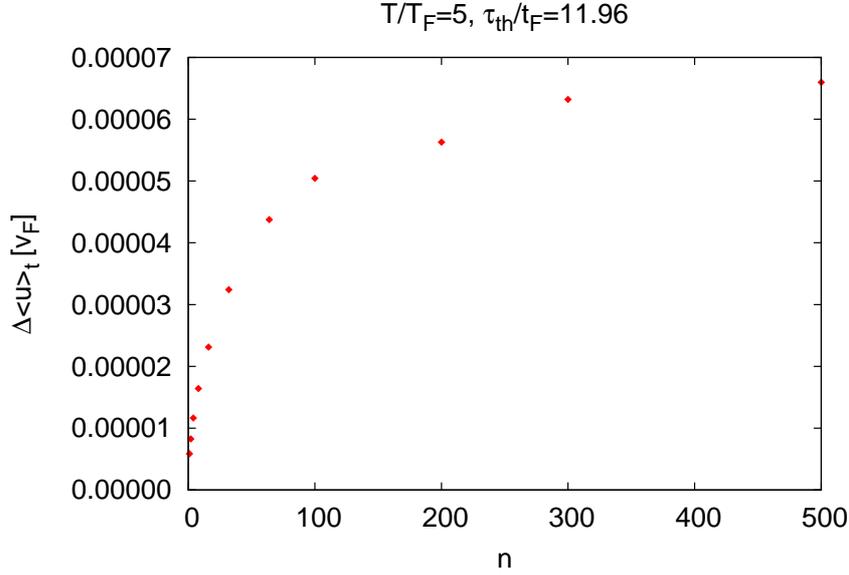


Abbildung 11: Fehler der Größe $\langle \bar{u} \rangle_t$ für eine unterschiedliche Anzahl n von Messpunkten je Block. Der Fehler steigt stark an und erreicht ein Plateau.

$(\frac{1}{\tau})_{th}$	$\frac{1}{t_F}$	$(\frac{1}{\tau})_{Fit}$	$\frac{1}{t_F}$
0,0731393		$0,0725446 \pm 7 * 10^{-7}$	
0,083588		$0,082677 \pm 2 * 10^{-6}$	
0,094036		$0,092661 \pm 2 * 10^{-6}$	
0,104485		$0,102361 \pm 3 * 10^{-6}$	

Tabelle 2: Vergleich von $(\frac{1}{\tau})_{th}$ mit $(\frac{1}{\tau})_{Fit}$. Für alle Werte gilt $(\frac{1}{\tau})_{th} > (\frac{1}{\tau})_{Fit}$.

5.2.2 Temperaturabhängigkeit des Spin-Drags

In Abbildung (12) ist der Spin-Drag und die inverse mittlere Stoßzeit in Abhängigkeit der Temperatur für die 4 theoretisch prognostizierten mittleren Stoßzeiten τ_{th} dargestellt. Die inverse mittlere Stoßzeit $\frac{1}{\tau}$ ist nahezu konstant und in Abbildung (12) durch eine Konstante gefittet. In Tabelle (2) findet sich ein Vergleich der theoretisch prognostizierten inversen Stoßzeit $(\frac{1}{\tau})_{th}$ mit der inversen mittleren Stoßzeit aus dem Fit $(\frac{1}{\tau})_{Fit}$. Es wurde bereits erläutert, dass die Streurate und damit die mittlere inverse Stoßzeit in der Simulation kleiner ist als in der Theorie prognostiziert, da Stöße von Teilchen mit hohem Relativgeschwindigkeitsbetrag nicht beachtet werden. Diese Tatsache spiegelt der Vergleich wider.

Für alle 4 mittleren Stoßzeiten ist der Spin-Drag Γ_{SD} von der Größenordnung der inversen mittleren Stoßzeit $\frac{1}{\tau}$ und nimmt mit steigender Temperatur ab. Für einen bestimmten Wertebereich der Temperatur entspricht der Spin-Drag nahezu der inversen mittleren Stoßzeit (zum Beispiel $\frac{T}{T_F} = 3$ für $\tau_{th} \approx 13.67$, siehe Abbildung 12a). Der Temperaturbereich ist für kleinere mittlere Stoßzeiten zu geringeren Temperaturen hinverschoben.

Wir haben im Theorieteil hergeleitet, dass für den Spin-Drag $\Gamma_{SD} = \frac{1}{\tau}$ gilt. Dabei haben wir die Relaxationszeit-Näherung verwendet und die Annahme gemacht, dass die mittlere Stoßzeit τ die einzig relevante Zeitskala darstellt. Theoretisch sollte der Spin-Drag folglich temperaturunabhängig sein. Die Größenordnung des Spin-Drags stimmt folglich mit der theoretischen Vorhersage überein, die Temperaturabhängigkeit des Spin-Drags wird durch die Theorie nicht beschrieben.

Da die Simulation keine Näherungen und Annahmen macht, sind deren Ergebnisse prinzipiell genauer als die theoretische Beschreibung. Zum Beispiel ist die Annahme der Theorie, dass die einzig relevante Zeitskala

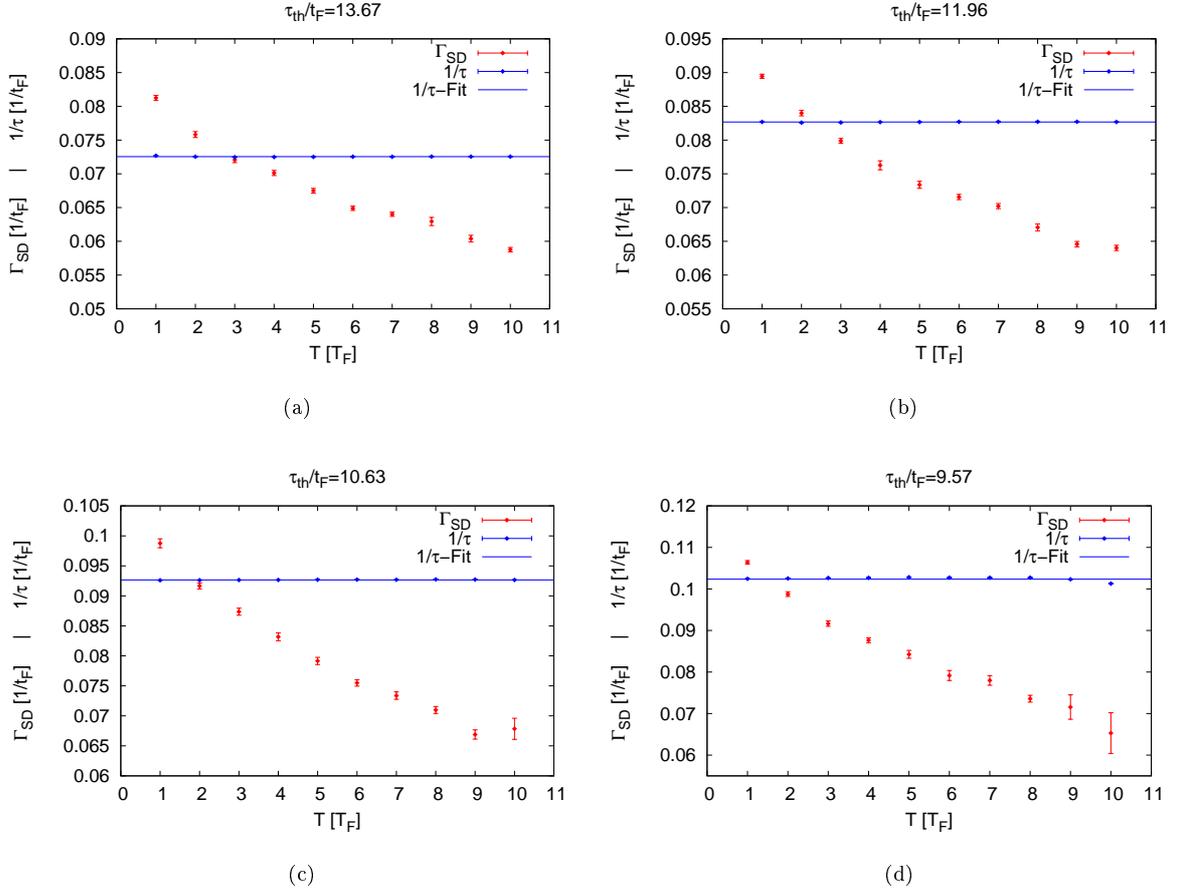


Abbildung 12: Temperaturabhängigkeit des Spin-Drags und Vergleich mit der inversen mittleren Stoßzeit

die mittlere Stoßzeit τ ist, bei genauerer Betrachtung nicht korrekt. Die Stoßzeit eines Teilchens hängt nach (4.2) vom Relativgeschwindigkeitsbetrag der stoßenden Teilchen ab. Ein Teilchen, welches einen im Vergleich zum mittleren Geschwindigkeitsbetrag hohen Geschwindigkeitsbetrag hat, stößt hauptsächlich mit Teilchen geringeren Geschwindigkeitsbetrags, da diese aufgrund der Maxwell-Boltzmann-Verteilung häufiger vorkommen. Der Relativgeschwindigkeitsbetrag bei einem Stoß mit Beteiligung vergleichsweise schneller Teilchen ist deshalb im Vergleich zum mittleren Relativgeschwindigkeitsbetrag bei einem Zusammenstoß deutlich erhöht. Schnelle Teilchen haben deswegen lange Stoßzeiten im Vergleich zur mittleren Stoßzeit τ . Auf der anderen Seite gibt es im System Streuprozesse, bei denen die Stoßzeit deutlich kleiner als die mittlere Stoßzeit τ ist. Da in der Relaxationszeit-Näherung nur eine Zeitskala als relevant betrachtet wird, nimmt man an, dass im Mittel alle Streuprozesse in gleichem Maße zum Spin-Drag beitragen. Betrachten wir nochmal das Beispiel vergleichsweise schneller Teilchen. Diese bekommen durch die äußere Kraft F_0 aufgrund ihrer im Mittel relativ langen Stoßzeit eine hohe zusätzliche Geschwindigkeit in x -Richtung. Dabei wächst aber gleichzeitig der Relativgeschwindigkeitsbetrag bei einem potentiellen Stoß, sodass sich die Stoßzeit dieser Teilchen weiter vergrößert. Dieses nicht lineare Verhalten wird in einer Mittelung über alle Stoßzeiten nicht berücksichtigt und zeigt, dass die mittlere Stoßzeit τ nur eine grobe Näherung für die einzig relevante Zeit sein kann. Außerdem veranschaulicht dieses Beispiel, dass die relevante Zeitskala eine Funktion der Temperatur sein kann, denn die Anzahl der Teilchen mit vergleichsweise hoher Geschwindigkeit nimmt mit steigender Temperatur zu.

Man kann die Ergebnisse der Simulation innerhalb der Relaxationszeit-Näherung beschreiben wenn man die einzig relevante Zeitskala durch $\tilde{\tau} = \left(\frac{1}{\tau} + \rho(T, \tau)\right)^{-1}$ ausdrückt. Für den Spin-Drag gilt mit dieser Annahme

$$\tilde{\Gamma}_{SD} = \frac{1}{\tilde{\tau}} + \rho(T, \tau). \quad (5.14)$$

Aufgrund der Simulationsergebnisse muss $\rho(T, \tau)$ eine mit steigender Temperatur abnehmende Funktion sein. Da der Temperaturbereich, in dem $\tilde{\Gamma}_{SD} \approx \frac{1}{\tau}$ gilt, für unterschiedliche mittlere Stoßzeiten ein anderer ist, muss $\rho(T, \tau)$ eine Funktion der mittleren Stoßzeit sein. Die genaue Abhängigkeit der Funktion $\rho(T, \tau)$ von τ wird sich im nächsten Abschnitt zeigen.

5.2.3 Abhängigkeit des Spin-Drags von der mittleren Stoßzeit

Für die Temperaturen $\frac{T}{T_F} = 2$ und $\frac{T}{T_F} = 5$ ist der Spin-Drage Γ_{SD} in Abhängigkeit der inversen mittleren Stoßzeit $\frac{1}{\tau}$ in Abbildung (13) geplottet. Für die inverse mittlere Stoßzeit sind keine Fehlerbalken eingezeichnet,

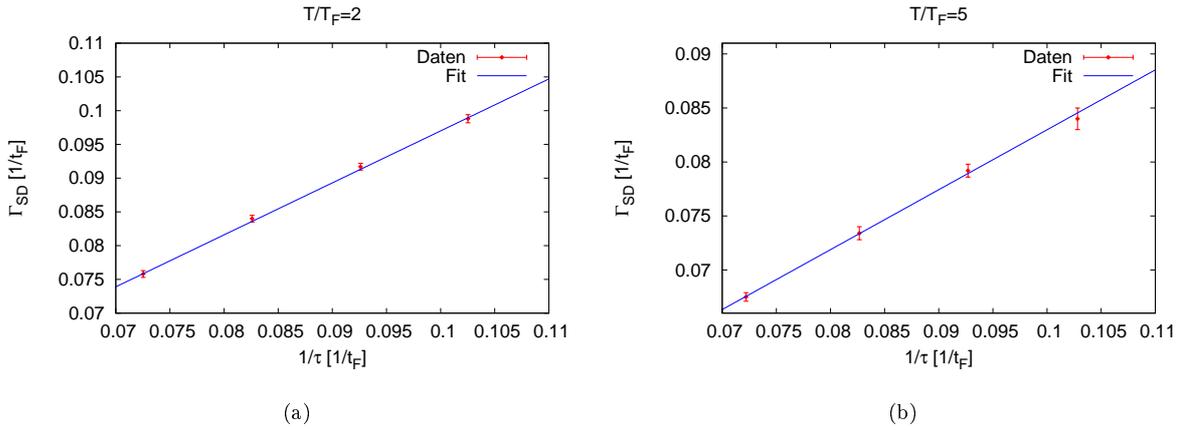


Abbildung 13: Abhängigkeit des Spin-Drags von der inversen mittleren Stoßzeit

da der Fehler im Vergleich zum Fehler des Spin-Drags vernachlässigbar klein ist. Die Messwerte lassen sich innerhalb ihrer Fehlerintervalle durch eine Gerade der Form

$$\Gamma_{SD} = c_1 \frac{1}{\tau} + c_2 \quad (5.15)$$

beschreiben. Ein linearer Fit der Messwerte ist in Abbildung (13) dargestellt. Aus dem Fit ergeben sich die Geradengleichungen

$$\Gamma_{SD} = \left[(0,77 \pm 0,03) \frac{1}{\tau} + (0,020 \pm 0,003) \frac{1}{t_F} \right] \text{ für } \frac{T}{T_F} = 2 \quad (5.16)$$

und

$$\Gamma_{SD} = \left[(0,55 \pm 0,03) \frac{1}{\tau} + (0,027 \pm 0,003) \frac{1}{t_F} \right] \text{ für } \frac{T}{T_F} = 5. \quad (5.17)$$

Bei der Fehlerberechnung der Fitparameter c_1 und c_2 sind die Fehler der einzelnen Messpunkte berücksichtigt.

Gilt $\Gamma_{SD} = \frac{1}{\tau}$ erhält man Ursprungsgeraden mit Steigung 1, d. h. $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$. Dies ist innerhalb der Fehlergrenzen für die beiden Temperaturwerte nicht der Fall. Die Größenordnung von c_1 liegt aber im Bereich von 1. Die Fitparameter hängen außerdem, entgegen der theoretischen Vorhersage, von der Temperatur ab.

Auch diese Ergebnisse lassen sich damit begründen, dass τ nicht die Relaxationszeit darstellt. Verwenden wir den bereits beschriebenen Ansatz (5.14), gilt

$$\rho(T, \tau) = \tilde{c}_1(T) \frac{1}{\tau} + c_2(T) \text{ mit } \tilde{c}_1(T) = c_1(T) - 1, \quad (5.18)$$

d. h. $\rho(T, \tau)$ ist eine lineare Funktion in $\frac{1}{\tau}$.

5.2.4 Fazit

Die Annahme, dass die mittlere Stoßzeit τ die relevante Zeit darstellt, liefert zwar richtige Größenordnungen für den Spin-Drag, vernachlässigt aber dessen Temperaturabhängigkeit. Die Relaxationszeit-Näherung beschreibt das System hinreichend genau, wenn man als relevante Zeitskala $(\frac{1}{\tau} + \rho(T, \tau))^{-1}$ wählt und somit für den Spin-Drag

$$\tilde{\Gamma}_{SD} = \frac{1}{\tau} + \rho(T, \tau) \quad (5.19)$$

erhält. Dabei ist $\rho(T, \tau)$ eine lineare Funktion in $\frac{1}{\tau}$ und nimmt mit steigender Temperatur ab.

5.3 Numerische Analyse des Systems mit Kraftschicht

5.3.1 Erweiterung der Simulation um die Kraftschicht

Um das System aus Kapitel 2 durch die Computersimulation modellieren zu können, wird diese um die Kraftschicht erweitert.

Durch die Kraftschicht verändert sich nur die stoßfreie Bewegung der Teilchen. Ein Teilchen mit Spin s befinde sich vor einem Zeitschritt Δt am Ort $\mathbf{x} = (x, y, z)$ und habe die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Nach dem Zeitschritt sei es am Ort $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ und habe die Geschwindigkeit $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$. Zu jedem Zeitpunkt gibt es hinsichtlich der stoßfreien Bewegung des Teilchens zwei Fälle.

1) Das Teilchen befindet sich außerhalb der Kraftschicht

In diesem Fall berechnet der Algorithmus die Zeit Δt_{err} , welche zum Erreichen der Kraftschicht notwendig ist. Diese Zeit wird allein durch die z -Geschwindigkeit v_z und die z -Koordinate des Ortes z des Teilchens festgelegt. Das Teilchen befinde sich über der Kraftschicht, d. h. $z > \frac{d}{2}$. Bewegt sich das Teilchen nach oben ($v_z > 0$), ist die Zeit zum Erreichen der Kraftschicht aufgrund der periodischen Randbedingungen durch

$$\Delta t_{err} = \frac{L - \frac{d}{2} - z}{v_z} = \frac{L}{v_z} - \frac{\frac{d}{2}}{v_z} - \frac{z}{v_z} \quad (5.20)$$

gegeben. Definieren wir den Wert k durch

$$k := \frac{v_z z}{|v_z z|}, \quad (5.21)$$

gilt in diesem Fall $k = 1$. Bei einer Bewegung nach unten ($v_z < 0$) wird die Schicht nach der Zeit

$$\Delta t_{err} = \frac{-\frac{d}{2} + z}{v_z} = -\frac{\frac{d}{2}}{v_z} + \frac{z}{v_z} \quad (5.22)$$

erreicht und es gilt $k = -1$. L und d wurden in Kapitel 2 definiert und beschreiben die Abmaße der Kraftschicht und des Systems. Unter Verwendung der Definition von k kann die Zeit zum Erreichen der Schicht durch

$$\Delta t_{err} = \frac{1}{2}(k+1) \frac{L}{v_z} - \frac{\frac{d}{2}}{v_z} - \frac{z}{|v_z|} \quad (5.23)$$

zusammengefasst werden. Das System ist hinsichtlich einer Spiegelung an der $x - y - Ebene$ symmetrisch. Um für ein Teilchen unterhalb der Kraftschicht ($z < 0$) die richtige Formel zu erhalten, müssen wir die Transformation

$$z \longrightarrow -z, \quad v_z \longrightarrow -v_z \quad (5.24)$$

ausführen. Unter dieser Transformation gilt für (5.23)

$$\Delta t_{err} \longrightarrow -\Delta t_{err}. \quad (5.25)$$

Da Δt_{err} eine positive Größe sein soll, gilt zusammengefasst für die Zeit zum Erreichen der Kraftschicht die Formel

$$\Delta t_{err} = \left| \frac{1}{2}(k+1) \frac{L}{v_z} - \frac{\frac{d}{2}}{v_z} - \frac{z}{|v_z|} \right|. \quad (5.26)$$

Erreicht das Teilchen die Kraftschicht im Zeitschritt Δt nicht ($\Delta t < \Delta t_{err}$), wird das Teilchen durch die Bewegungsgleichungen außerhalb der Kraftschicht

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}\Delta t \text{ und } \mathbf{v}' = \mathbf{v} \quad (5.27)$$

propagiert. Ist der z-Geschwindigkeitsbetrag klein, d. h.

$$|v_z| < \varepsilon \text{ mit } 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (5.28)$$

wird Δt_{err} nicht berechnet und die Propagation des Teilchens erfolgt ebenfalls nach den Bewegungsgleichungen außerhalb der Kraftschicht.

Erreicht das Teilchen im vorgegebenen Zeitschritt Δt die Kraftschicht, d. h. $\Delta t_{err} \leq \Delta t$, bewegt es sich bis zum Erreichen der Kraftschicht durch die Bewegungsgleichungen außerhalb der Kraftschicht. Anschließend wird die verbleibende Propagationszeit $\Delta t' = \Delta t - \Delta t_{err}$ berechnet. Danach wird $\Delta t = \Delta t'$ gesetzt und Fall 2 ausgeführt, welcher im Folgenden erläutert wird.

2) Das Teilchen befindet sich innerhalb der Kraftschicht

Befindet sich das Teilchen innerhalb der Kraftschicht, wird zuerst die Zeit Δt_{ver} berechnet, nach der das Teilchen die Kraftschicht verlässt. Bewegt sich das Teilchen in der Kraftschicht nach oben ($v_z > 0$), ist diese Zeit durch

$$\Delta t_{ver} = \frac{\frac{d}{2} - z}{v_z} = \frac{d}{2v_z} - \frac{z}{v_z} \quad (5.29)$$

gegeben. Bei einer Bewegung nach unten ($v_z < 0$) benötigt das Teilchen die Zeit

$$\Delta t_{ver} = -\frac{\frac{d}{2} + z}{v_z} = -\frac{d}{2v_z} - \frac{z}{v_z} \quad (5.30)$$

zum Verlassen der Kraftschicht. Zusammengefasst ergeben diese Ausdrücke die Formel

$$\Delta t_{ver} = \frac{d}{2|v_z|} - \frac{z}{v_z}. \quad (5.31)$$

Verlässt das Teilchen die Kraftschicht im Zeitschritt Δt nicht, d. h. $\Delta t \leq \Delta t_{ver}$, wird das Teilchen den Zeitschritt Δt durch die Bewegungsgleichungen in der Kraftschicht

$$\mathbf{x}' = (x + v_x\Delta t + \frac{1}{2}sF_0\Delta t^2, y + v_y\Delta t, z + v_z\Delta t) \quad (5.32)$$

und

$$\mathbf{v}' = (v_x + sF_0\Delta t, v_y, v_z) \quad (5.33)$$

propagiert. Für kleine z-Geschwindigkeitsbeträge (5.28) wird Δt_{ver} nicht berechnet und das Teilchen ebenfalls durch die Bewegungsgleichungen in der Kraftschicht propagiert.

Für $\Delta t > \Delta t_{ver}$ wird analog zu Fall 1 die verbleibende Zeit $\Delta t' = \Delta t - \Delta t_{ver}$ berechnet, $\Delta t = \Delta t'$ gesetzt und Fall 1 ausgeführt.

Im nächsten Abschnitt wird die Vorgehensweise hinsichtlich der Analyse des Systems erklärt.

5.3.2 Vorgehensweise

Im Folgenden wollen wir die in Abschnitt 4.4.1 definierte Zerfallslänge bestimmen und deren Abhängigkeit von der mittleren Stoßzeit τ und der Temperatur T überprüfen.

Das System wird - wie in Abschnitt 4.4.1 beschrieben - in Messschichten der Dicke d unterteilt. Die Anzahl der Messschichten sei $2K + 1$, wobei die Messschicht in der Mitte des Systems der Kraftschicht entspricht. Die Messschicht k befinde sich um den Ort $z_k = kd$ mit $k \in [-K, K]_{\mathbb{N}}$. Für die Kraftschicht gilt somit $k = 0$. Es wird ein Algorithmus implementiert, welcher die mittlere x-Geschwindigkeit $u_s(z_k, t_j)$ der Teilchen mit Spin s in jeder Messschicht k zu jedem während der Simulation erreichten Zeitpunkt t_j bestimmt, daraus $u(z_k, t_j) = \frac{u_{\uparrow}(z_k, t_j) - u_{\downarrow}(z_k, t_j)}{2}$ berechnet und in eine Datei ausgibt. Das System wird für die selben Werte von a und T wie im vorherigen System untersucht. Weicht die Streurrate im System kaum von der im System ohne äußere Kraft ab, resultieren aus den Werten a und T die selben Parameterpaare (τ, T) wie zuvor.

Im Vergleich zum zuvor beschriebenen System wirkt die äußere Kraft nicht mehr im ganzen System, sondern nur noch in der Kraftschicht der Dicke d . Betrachtet man die Kraft F_0 wie zuvor als Störung des Systems ohne äußere Kraft, kann man annehmen, dass diese Störung um den Faktor $\frac{d}{L}$ im Vergleich zum vorherigen System reduziert ist. Für eine im Vergleich zum vorherigen System um den Faktor $\frac{L}{d}$ größere Kraft F_0 stellt sich deshalb im System ein stationärer Zustand ein und die Streurrate des Systems weicht kaum von der Streurrate des Systems ohne äußere Kraft ab. Nach einigen Testläufen mit unterschiedlichen Parametern stellt man zuerst fest, dass $u(z_k, t_j)$ für Werte von z_k in der Umgebung der Kraftschicht zu Beginn der Simulation steil ansteigt und nach kurzer Zeit um einen bestimmten Wert fluktuiert. Da $u(z_k)$ aus der äußeren Kraft F_0 resultiert, muss diese groß genug gewählt werden, dass der Wert, um den $u(z_k, t_j)$ nach kurzer Zeit fluktuiert für z_k - Werte in der Umgebung der Kraftschicht größer als die Fluktuationen von $u(z_k, t_j)$ ist. Nach zahlreichen Testdurchläufen der Simulation hat sich ergeben, dass die Parameter $F_0 = 0.051$ und $d = \frac{L}{101}$ ideal sind. Insbesondere ist der Parameter F_0 dadurch viel kleiner als der Wert für die Kraft im vorherigen System mal den Faktor $\frac{L}{d}$. Man erwartet deshalb, dass die Streurrate γ kaum von der Streurrate im System ohne äußere Kraft abweicht. Durch die Wahl der Parameter F_0 und d gilt außerdem

$$\frac{d}{(\langle |v_z| \rangle \tau)_{min}} \approx 0.06 \ll 1, \quad (5.34)$$

sodass die in Abschnitt 4.4.1 gestellte Forderung $d \ll \langle |v_z| \rangle \tau$ erfüllt ist.

Wie zuvor werden für jedes Parameterpaar (τ, T) 50 Simulationen durchgeführt, um die Fluktuationen von $u(z_k, t_j)$ zu verringern. Jede dieser Simulationen $i \in [1, 50]_{\mathbb{N}}$ liefert die Werte $u_i(z_k, t_j)$ für alle möglichen Orts- werte z_k und Zeitwerte t_j . Das von mir geschriebene Programm „av_p_sgr.cpp“ mittelt die Werte $u_i(z_k, t_j)$ aller 50 Simulationen zum Wert $\bar{u}(z_k, t_j)$ nach der Vorschrift

$$\bar{u}(z_k, t_j) = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} u_i(z_k, t_j). \quad (5.35)$$

Für die Parameter $\frac{T}{T_F} = 1$ und $\frac{\tau d}{t_F} \approx 11.96$ ist der zeitliche Verlauf von $\bar{u}(z_k, t_j)$ für die Schichten $k = 0$ (Kraftschicht), $k = 1$ und $k = 2$ in Abbildung (14) dargestellt.

Anschließend bildet das Programm „av_p_sgr.cpp“ den Mittelwert $\bar{u}'(z_k, t_j)$ der mittleren x-Geschwindigkeiten zweier Messschichten, welche den gleichen Abstand zur Kraftschicht haben, da diese Werte aufgrund der Symmetrie des Systems theoretisch gleich sind, d. h.

$$\bar{u}'(z_k, t_j) = \frac{\bar{u}(z_k, t_j) + \bar{u}(z_{-k}, t_j)}{2} \text{ mit } k \in [0, K]_{\mathbb{N}^+}. \quad (5.36)$$

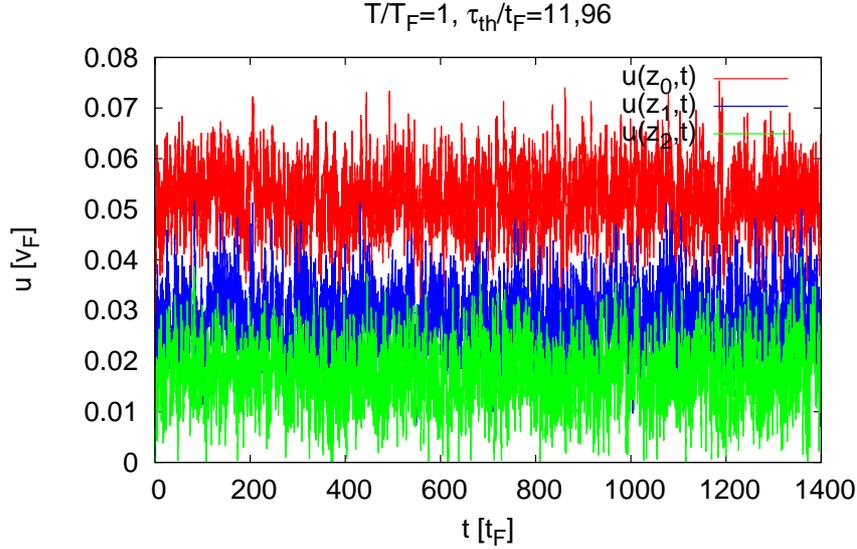


Abbildung 14: Zeitlicher Verlauf von $\bar{u}(z_k, t_j)$, dargestellt für $k = 0$ (Kraftschicht), $k = 1$ und $k = 2$

Da der steile Anstieg von $\bar{u}'(z_k, t_j)$ zu Beginn der Simulation nicht berücksichtigt werden soll, wird äquivalent zur Analyse des Spin-Drags nach Betrachtung des zeitlichen Verlaufs von $\bar{u}'(z_k, t_j)$ ein Cut-Off t_{CO} festgelegt, ab dem Messwerte berücksichtigt werden. Anschließend führt „av_p_sgr.cpp“ für jeden Wert k eine zeitliche Mittelung von $\bar{u}'(z_k, t_j)$ mit Hilfe der Relation

$$\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k) = \frac{1}{J} \sum_{j \text{ mit } t_j > t_{CO}} \bar{u}'(z_k, t_j) \quad (5.37)$$

durch. J ist die Anzahl aller ab dem Cut-Off in der Simulation erreichten Zeitpunkte. Außerdem berechnet „av_p_sgr.cpp“ den Fehler von $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ mit der Annahme statistisch unabhängiger Messwerte $\bar{u}'(z_k, t_j)$. Da die Messwerte wie im vorherigen System korreliert sind, wird die bereits beschriebene „Blocking-Analyse“ für stichprobenartig ausgewählte $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ bei unterschiedlichen Parameterpaaren (τ, T) und k -Werten durchgeführt. Dabei ergibt sich, dass der Fehler wieder um das 5- bis 20-fache unterschätzt ist. Alle aus der Betrachtung unabhängiger Messwerte erhaltenen Fehler werden deshalb mit dem Faktor 20 multipliziert. Zusätzlich berechnet „av_p_sgr.cpp“ den Mittelwert der Stoßzeit aller 50 Simulationen und dessen Fehler. Im letzten Schritt legt „av_p_sgr.cpp“ für jedes Parameterpaar (τ, T) eine Datei an, die für jedes k den Wert $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ und den Fehler dieses Werts enthält.

Für die theoretisch prognostizierte mittlere Stoßzeit $\frac{\tau_{th}}{t_F} \approx 11.96$ ist in Abbildung (15) $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ mit Fehler für zwei Temperaturwerte geplottet. Da mit steigender Temperatur die Fluktuationen zunehmen, ist der Fehler für $\frac{T}{T_F} = 10$ im Vergleich zu $\frac{T}{T_F} = 1$ deutlich erhöht. Man könnte meinen, die Datenpunkte durch eine Exponentialfunktion beschreiben zu können. In Abschnitt 4.4.1 haben wir gezeigt, dass dies erst ab einem gewissen Abstand von der Kraftschicht möglich ist, da der generelle Verlauf von $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ für $z_k > \frac{d}{2}$ durch die nicht analytische Funktion (4.87) beschrieben wird. Die Messpunkte von $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ liegen für kleine z_k deutlich über dem Verlauf einer Exponentialfunktion. Um die Zerfallslänge κ zu bestimmen, müssen die Messpunkte nach (4.90) durch eine Exponentialfunktion gefittet werden. Die Frage ab welchem z_k gefittet werden kann, lässt sich leicht beantworten indem man für jedes Parameterpaar $\ln(\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k))$ gegen z_k aufträgt. Die Punkte liegen ab einem bestimmten Wert z_{ab} auf einer Geraden. Für die Parameter $\frac{\tau_{th}}{t_F} \approx 10.63$ und $\frac{T}{T_F} = 5$ ist der resultierende Plot in Abbildung (16) dargestellt. Die zu Beginn stark von einer Gerade abweichenden Messpunkte werden nicht berücksichtigt.

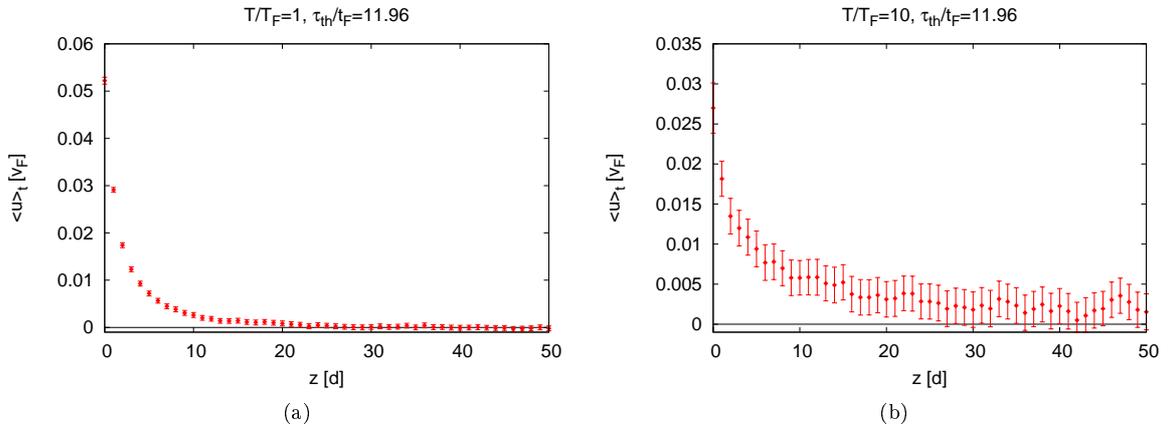


Abbildung 15: Verlauf von $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ für zwei unterschiedliche Werte der Temperatur

Die starken Abweichungen der Messpunkte für große z_k spielen für die Fragestellung, ab welchem Wert z_k gefittet werden soll keine Rolle, da sie aus der Logarithmusfunktion resultieren, welche für kleine Argumente große Werte annimmt und dadurch den Fehler kleiner $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ enorm verstärkt. Nach dem Test aller Parameterpaare stellt sich heraus, dass eine Abweichung von der Exponentialfunktion für die ersten 2 bis 3 Messpunkte auftritt. Deswegen werden im Folgenden die ersten 3 Messpunkte nicht beachtet, d. h. $z_k \geq 4d$.

Ein Problem stellt die Größe des Systems in z -Richtung dar. Vor allem bei hohen Temperaturen existieren schnelle Teilchen, welche die Kraftschicht und eine Strecke in z -Richtung mit einer Länge größer als $\frac{L}{2}$ stoßfrei durchqueren können. Durch die periodischen Randbedingungen tauchen diese Teilchen hinsichtlich der z -Koordinaten auf der anderen Seite des Systems wieder auf. Dabei wird x -Impuls von zwei Seiten in die Messschichten, welche sich nahe der Ränder des Systems hinsichtlich der z -Richtung befinden, transportiert. In diesen Randgebieten gilt die Beschreibung durch eine Exponentialfunktion nicht mehr. Für die bei unseren Parameterpaaren maximale mittlere freie Weglänge in z -Richtung $(\bar{l}_z)_{max}$ gilt für $\frac{T}{T_F} = 10$ und die mittlere Stoßzeit $\frac{T}{t_F} \approx 13.67$

$$\left(\frac{\bar{l}_z}{\frac{L}{2}} \right)_{max} \approx 0.23. \quad (5.38)$$

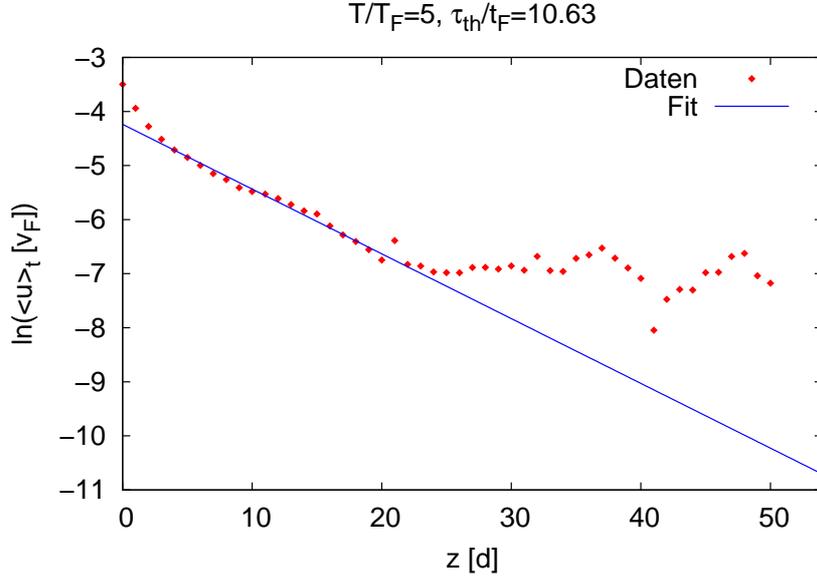


Abbildung 16: Verlauf von $\ln(\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k))$ - Fit vom einschließlich 4. Datenpunkt bis zum einschließlich 20. Datenpunkt

In Abbildung (15b) ist dieser Effekt daran zu erkennen, dass $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ mit wachsendem z_k nicht gegen Null strebt. Im Folgenden wird deswegen ein Cut-Off z_{CO} für z_k festgelegt, bis zu dem die Exponentialfunktionen an $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ gefittet wird. Nach genauer Betrachtung der graphischen Darstellung von $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ wird der Cut-Off entsprechend der Tabelle (3) festgelegt.

$T [T_F]$	$z_{CO} [L]$
1, 2, 3	$\frac{1}{4}$
4, 5, 6	$\frac{1}{6}$
7, 8, 9	$\frac{1}{8}$
10	$\frac{1}{10}$

Tabelle 3: Cut-Off z_{CO} für unterschiedliche Temperaturen

Anschließend wird für jedes Parameterpaar (τ, T) mit Hilfe von Mathematica die Exponentialfunktion $A \exp[-Bz]$ an $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$ gefittet. Dabei werden sowohl beim Fitten als auch bei der Fehlerberechnung der Fitparameter A und B die Fehler der einzelnen Messpunkte berücksichtigt. In Abbildung (17) ist ein solcher Fit für die Parameter $\frac{\tau_{th}}{t_F} \approx 11.96$ und $\frac{T}{T_F} = 5$ dargestellt. Man erhält folglich für alle Parameterpaare (τ, T) eine Zerfallslänge κ mit Fehler, da diese dem Kehrwert des Fitparameters B entspricht.

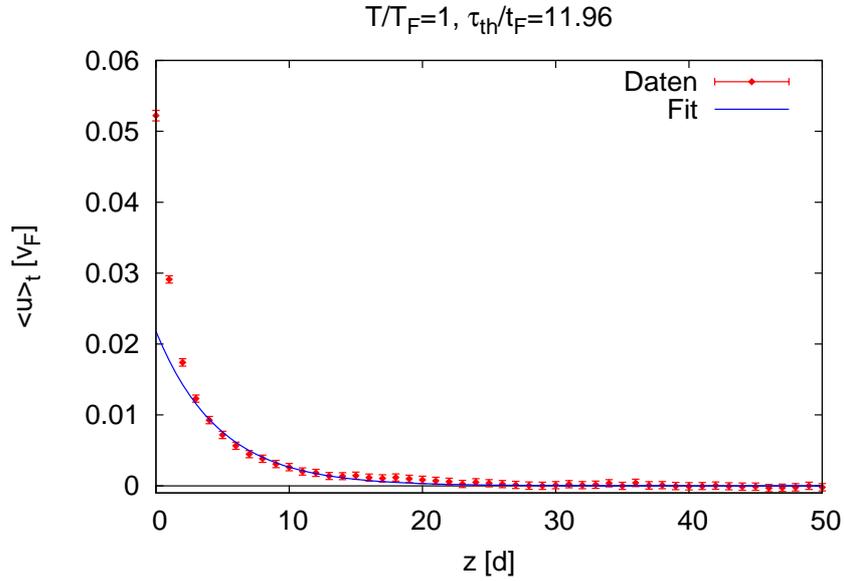


Abbildung 17: Fit einer Exponentialfunktion an $\langle \bar{u}' \rangle_t(z_k)$

Da es zu jeder mittleren Stoßzeit 10 Temperaturwerte gibt, besteht die Möglichkeit, die Abhängigkeit der Zerfallslänge κ von der mittleren Stoßzeit τ und der Temperatur T zu untersuchen. Damit werden wir uns in den nächsten Abschnitten beschäftigen.

5.3.3 Abhängigkeit der Zerfallslänge von der mittleren Stoßzeit

Die Zerfallslänge κ wird gegen die mittlere Stoßzeit τ geplottet. Die Fehler der mittleren Stoßzeiten werden dabei vernachlässigt, da sie um ein vielfaches kleiner als die Fehler der Zerfallslängen sind. Für $T \in \{1, 2, 3, 8\}$ sind diese Plots in Abbildung (18) dargestellt. Da wir eine lineare Abhängigkeit der Zerfallslänge κ von der mittleren Stoßzeit τ erwarten, werden die Messpunkte durch eine Gerade gefittet. Man erhält dadurch Geradengleichungen der Form

$$\kappa = c_3\tau + c_4. \quad (5.39)$$

Da die Fehler der Messpunkte dominant sind, werden sie bei der Fehlerberechnung der Fitparameter c_3 und c_4 berücksichtigt. In Tabelle (4) sind die Ergebnisse der Fits zusammengefasst. Es fällt auf, dass die Fehler der Fitparameter schon für niedrige Temperaturen sehr hoch sind. Da die Messpunkte relativ weit vom Ursprung entfernt liegen, ist der große Fehler von c_4 jedoch nicht verwunderlich.

$T [T_F]$	c_3	$\frac{d}{t_F}$	$c_4 [d]$
1	0.19 ± 0.09		2 ± 1
2	0.5 ± 0.2		1 ± 3
3	0.7 ± 0.3		-1 ± 3
8	1 ± 2		-3 ± 15

Tabelle 4: Fitparameter c_3 und c_4 mit Fehler für unterschiedliche Werte der Temperatur

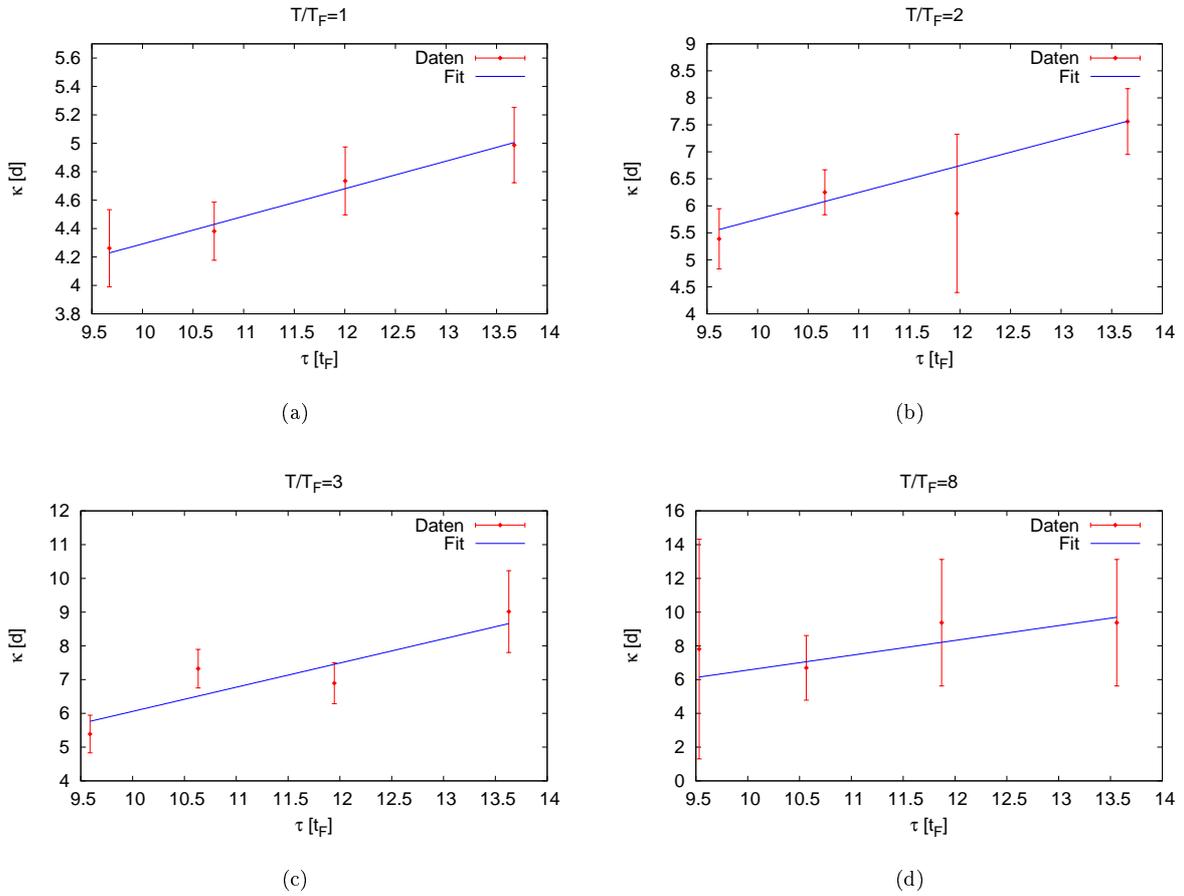


Abbildung 18: Abhängigkeit der Zerfallslänge von der mittleren Stoßzeit

Nimmt man an, dass die mittlere Stoßzeit τ die einzig relevante Zeitskala darstellt, erwartet man aufgrund von Gleichung (4.91), dass für die Zerfallslänge

$$\kappa = c_\kappa \tau \sqrt{T} \quad (5.40)$$

gilt. Dabei ist c_κ unabhängig von T und τ . Das lineare Verhalten in τ wird durch die Messergebnisse Innerhalb der Fehlergrenzen bestätigt. Ob der Fitparameter c_4 verschwindet, kann aufgrund der hohen Messfehler und der wenigen Messpunkte nicht festgestellt werden.

5.3.4 Temperaturabhängigkeit der Zerfallslänge

Um die Abhängigkeit der Zerfallslänge von der Temperatur untersuchen zu können, muss die mittlere Stoßzeit für die unterschiedlichen Werte der Temperatur konstant sein. Dass dies durch die Wahl des Parameters a erfüllt ist, erkennt man in Abbildung (19). Die Werte für die mittlere Stoßzeit sind durch eine Konstante τ_{Fit} gefittet. Diese ist zusammen mit der theoretisch vorhergesagten mittleren Stoßzeit τ_{th} in Tabelle (5) aufgeführt. Die beiden Werte stimmen nahezu überein.

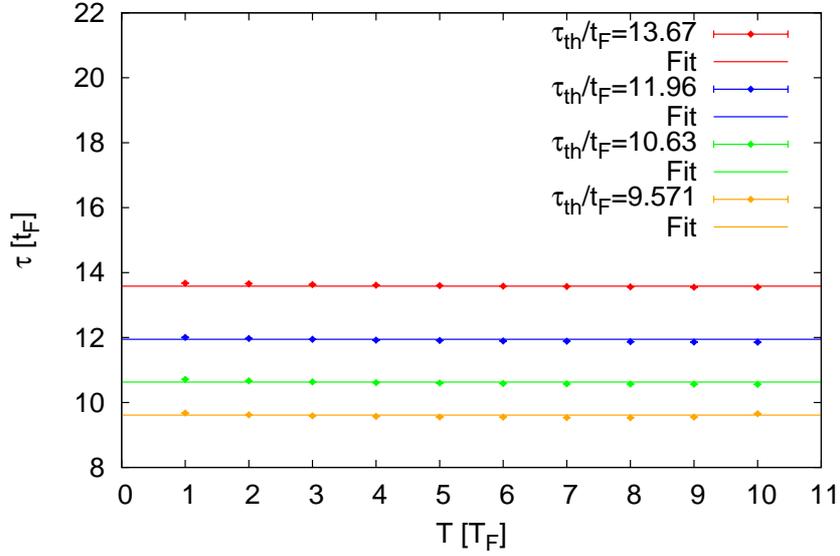


Abbildung 19: Durch Wahl des Parameters a ist die mittlere Stoßzeit für alle gewählten Parameter der Temperatur nahezu konstant.

In Abbildung (20) ist die Zerfallslänge κ mit Fehler in Abhängigkeit von der Wurzel der Temperatur \sqrt{T} für 4 unterschiedliche mittlere Stoßzeiten dargestellt. Die Messpunkte können innerhalb ihrer relativ großen Fehler für alle Stoßzeiten durch eine Gerade beschrieben und deshalb linear gefittet werden. Es ergeben sich Geradengleichungen der Form

$$\kappa = c_5 \sqrt{T} + c_6 \quad (5.41)$$

mit den Fitparametern c_5 und c_6 . Da wie zuvor die Fehler der Messwerte relevant sind, werden diese bei der Fehlerberechnung von c_5 und c_6 berücksichtigt. Die Werte der Fitparameter und deren Fehler für die jeweiligen mittleren Stoßzeiten sind in Tabelle (5) zusammengefasst. c_5 ist eine Funktion der mittleren Stoßzeit τ . Die

$\tau_{th} [t_F]$	$\tau_{Fit} [t_F]$	c_5	$\frac{d}{\sqrt{T_F}}$	$c_6 [d]$
13.673	13.581 ± 0.002	3.3 ± 0.6		1.8 ± 0.7
11.963	11.945 ± 0.005	3.0 ± 0.6		1.7 ± 0.7
10.634	10.630 ± 0.007	2.9 ± 0.4		1.6 ± 0.5
9.571	9.611 ± 0.009	2.1 ± 0.7		2.2 ± 0.8

Tabelle 5: Mittlere Stoßzeit τ und Fitparameter c_5 und c_6

gemessene Zerfallslänge ist innerhalb der Fehlergrenzen eine lineare Funktion in \sqrt{T} .

Bei der numerischen Untersuchung des Spin-Drags haben wir festgestellt, dass die Annahme die mittlere Stoßzeit τ ist die Relaxationszeit, nur eine Näherung darstellt. Vorallem ist es möglich, dass die relevante Zeitskala temperaturabhängig ist. In diesem Fall wäre κ nicht mehr linear in \sqrt{T} da in der Relaxationszeit ebenfalls eine Temperaturabhängigkeit auftreten würde. Da wir bei der Untersuchung der Messpunkte festgestellt haben, dass κ in \sqrt{T} linear ist, beschreibt die Annahme, dass τ die Relaxations-Zeit ist, das System hinreichend genau.

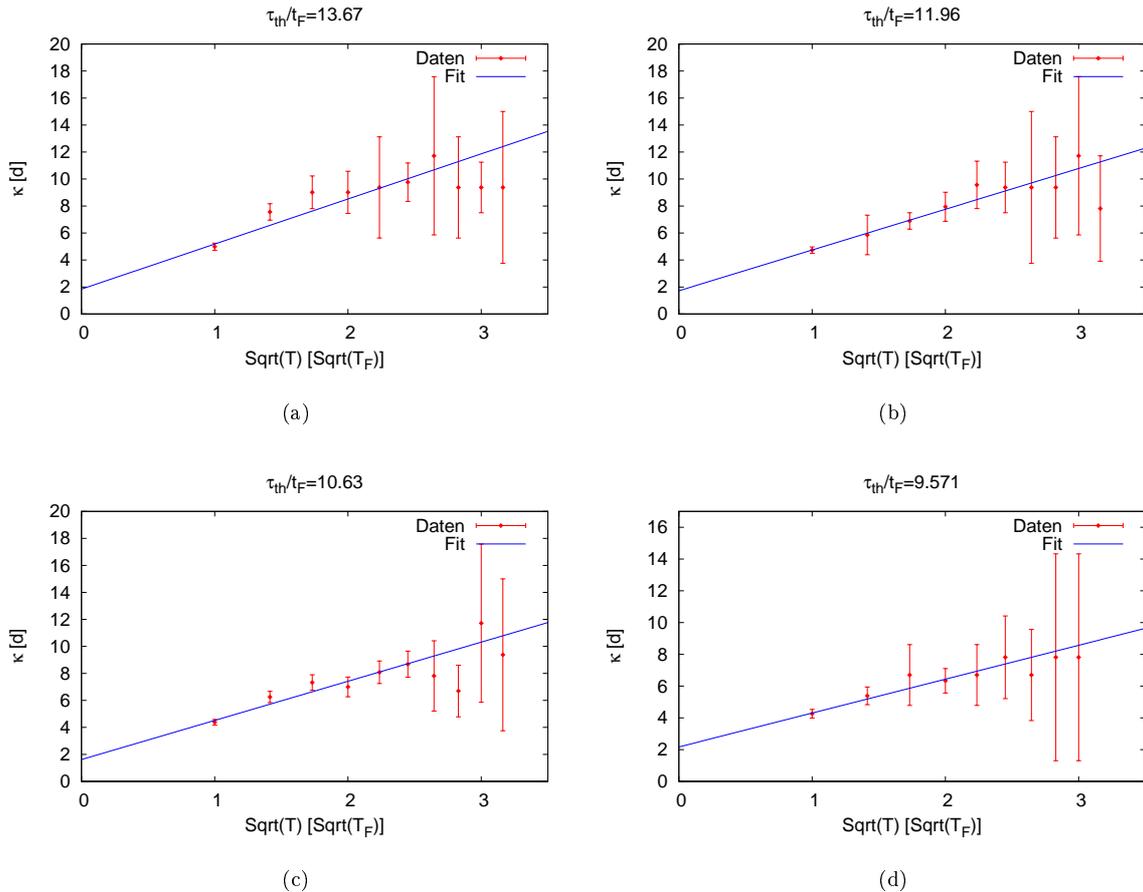


Abbildung 20: Temperaturabhängigkeit der Zerfallslänge

5.3.5 Fazit

Man kann die mittlere x -Geschwindigkeit u durch (4.87) beschreiben und für ausreichende Entfernung von der Kraftschicht durch eine Exponentialfunktion nähern. Die dabei auftretenden Messfehler sind enorm hoch. Diese könnte man durch mehrere Simulationsvorgänge vermindern. Allerdings beanspruchen bereits 50 Simulationen je Parameterpaar (τ, T) hohe Rechenkapazitäten.

Die Abhängigkeit der Zerfallslänge κ von Temperatur und mittlerer Stoßzeit lässt sich innerhalb der Relaxationszeit-Näherung hinreichend genau beschreiben, wenn man als relevante Zeitskala die mittlere Stoßzeit τ annimmt. Dabei ist die Zerfallslänge innerhalb der Fehlergrenzen eine lineare Funktion der mittleren Stoßzeit τ und der Wurzel der Temperatur \sqrt{T} .

6 Schluss

Die Arbeit hat gezeigt, dass bereits die theoretische Beschreibung von Nichtgleichgewichtszuständen und Transportprozessen in einfach anmutenden Systemen äußerst kompliziert sein kann. Am Ende ist es diese Mühe wert, da die erhaltenen Ergebnisse durch die Computersimulation hinreichend genau bestätigt werden. Eine große Schwierigkeit an der Arbeit war die Tatsache, dass Literatur zu Transportkoeffizienten in zweikomponentigen kalten Fermigasen kaum vorhanden ist und ich deswegen die meisten Theorien zu Spin-Drag und Spin-Scherviskosität selbst erarbeiten musste. Hinsichtlich der allgemeinen Theorie zu Nichtgleichgewichtszuständen und Transportkoeffizienten haben mir die Lehrbücher [6, 8] am meisten geholfen. Für das Verständnis der Simulation war außerdem die Doktorarbeit [2] äußerst hilfreich.

Literatur

- [1] S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari. Theory of ultracold atomic fermi gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1215–1274, Oct 2008.
- [2] O. Goulko. *Thermodynamic and hydrodynamic behaviour of interacting Fermi gases*. PhD thesis, University of Cambridge and Wolfson College, 2011.
- [3] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 2004.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifšic. *Mechanik*. Lehrbuch der theoretischen Physik. Harri Deutsch, 1997.
- [5] D.C. Rapaport. *The Art of Molecular Dynamics Simulation*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] F. Reif. *Statistische Physik und Theorie der Wärme*. De Gruyter, 1987.
- [7] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, 1994.
- [8] F. Schwabl. *Statistische Mechanik*. Springer-Lehrbuch. Springer London, Limited, 2006.
- [9] R. Zwanzig. *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, USA, 2001.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe.

München, den 26. Juli 2013

Sebastian Stemmer