

Statistische Physik in der Biologie

Statistische Physik komplexer Netzwerke

Vorgetragen von:

Stefan Mauerberger

stefan.mauerberger@physik.uni-muenchen.de

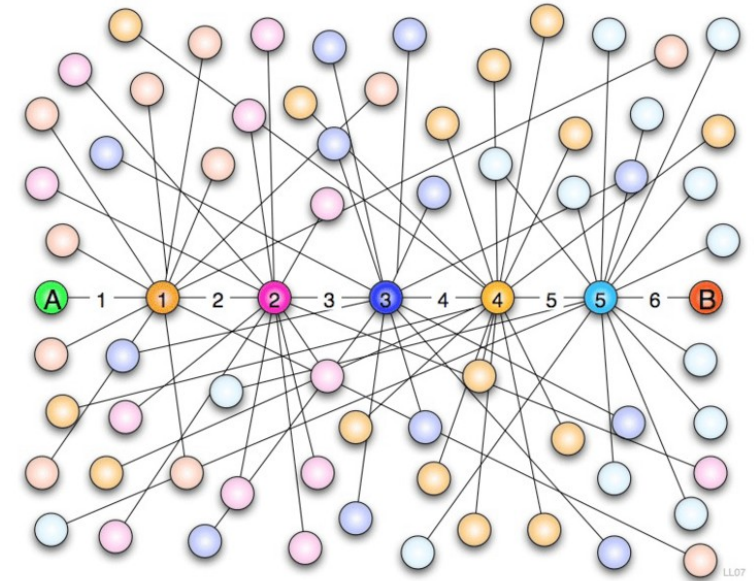
Gliederung

- Motivation
- Bestandteile eines Netzwerks
- Wichtige Kenngrößen
- Theoretische Ansätze
 - Random-Graf-Netzwerke
 - Small-World-Netzwerke
 - Scale-Free-Netzwerke
- Six degrees of separation
- Zellulärer Stoffwechsel
- Ausblick
- Literatur- und Abbildungsverzeichnis

Motivation

■ Six degrees of separation

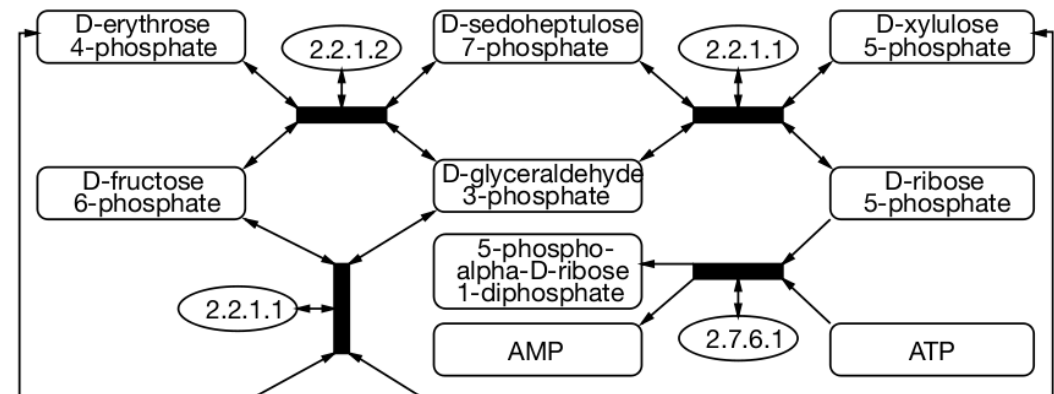
- erste Überlegungen von Stanley Milgram 1967
- Diese These war lange Zeit kaum belegbar
- 2007: Analyse von IM Kontakten durch Microsoft



„Kleine-Welt-Phänomen“
von Laurens van Lieshout

■ Zellulärer Stoffwechsel

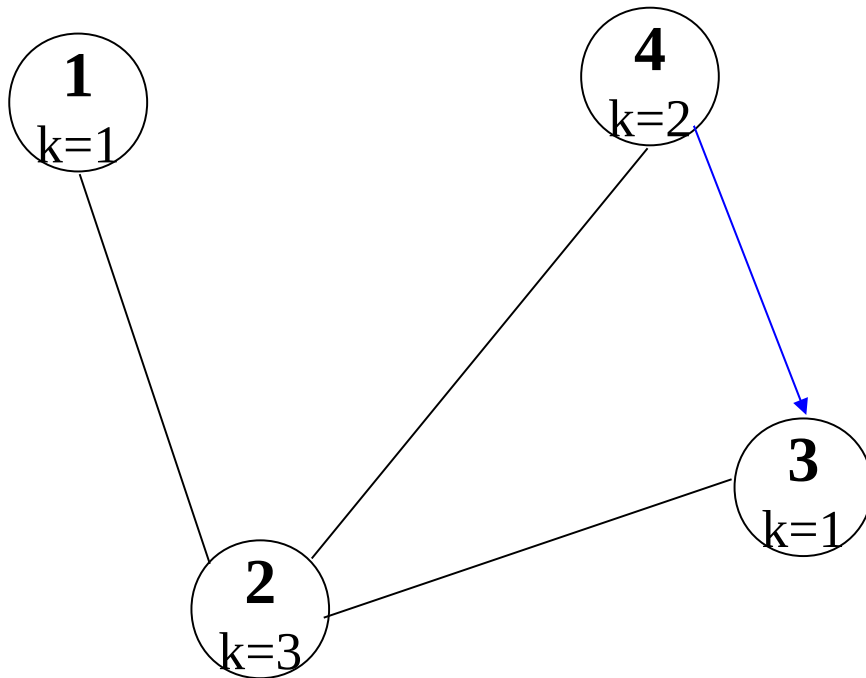
- 43 untersuchte Organismen
- u. a. die Kolibakterie
- von Jeong aus dem Jahr 2000



Ausschnitt aus dem Pentose Phosphat Weg in E. Coli
von H. Jeong

Bestandteile

Graf



Adjeszenz-Matrix

	1	2	3	4	...	n	
1	0	1	0	0			k=1
2	1	0	1	1			k=1
3	0	1	0	0			k=1
4	0	1	1	0			k=2
⋮							
n					⋮		⋮
	k=1	k=3	k=2	k=1			

\textcircled{n} ein **Knoten** des Netzwerks
→ eine **Kante** zwischen Knoten

k_i **Grad** des i-ten Knotens

wichtige Kenngrößen

- Gradverteilung: $P(k)$
WSK, dass ein Knoten k Kanten besitzt
- Mittlere Kantenzahl: $\langle k \rangle$
- Clustering Koeffizient: $C_i = \frac{2 E_i}{k_i(k_i - 1)}$
Maß für die Verlinkung des i -ten Knotens
- Mittlere Weglänge: l
mittlere Abstand zweier zufällig
ausgewählter Knoten

Random-Graph-Theory

ER-Modell

- Zahl der Kanten:

$$n = pN(N-1)/2$$

- Netz zusammenhängend:

$$p = 2/N$$

- Gradverteilung:

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \rightarrow \frac{z^k e^{-z}}{k!}$$

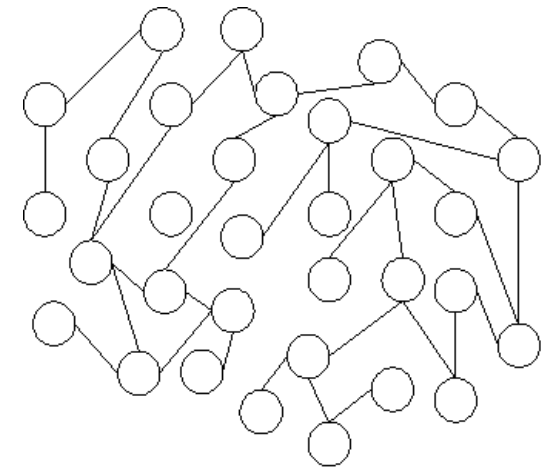
$$\langle k \rangle = pN \rightarrow z$$

- Clustering Koeffizient:

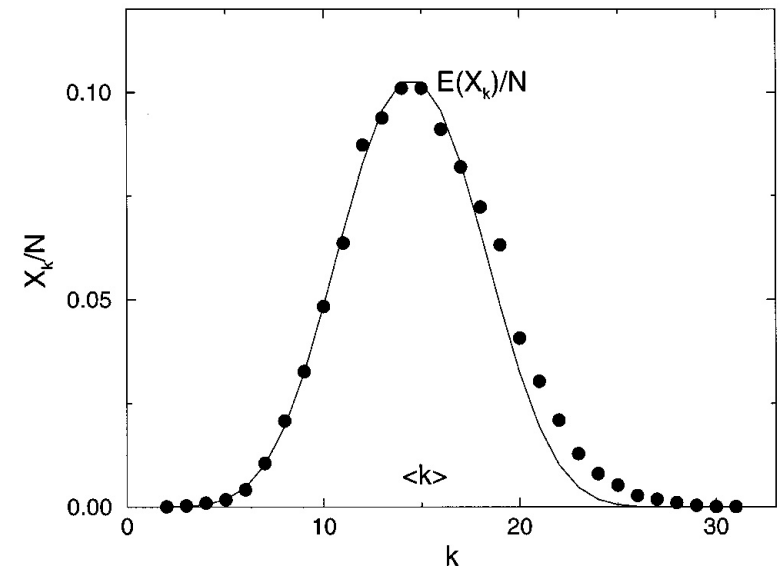
$$C_i = \frac{\langle k \rangle}{N} = p$$

- mittlerer Abstand:

$$l \propto \frac{\ln(N)}{\ln(\langle k \rangle)}$$



Random Graf



Gradverteilung eines ER-Grafen

Small-World Netzwerke

WS-Modell

- reguläres Gitter von N Knoten mit K nächsten Nachbarn
- zufälliges auftrennen und neuverbinden von Kanten
- Clustering Koeffizient:

$$C_{(p)} = \frac{3K(K-1)}{2K(2K-1) + 8pK^2 + 4p^2K^2}$$

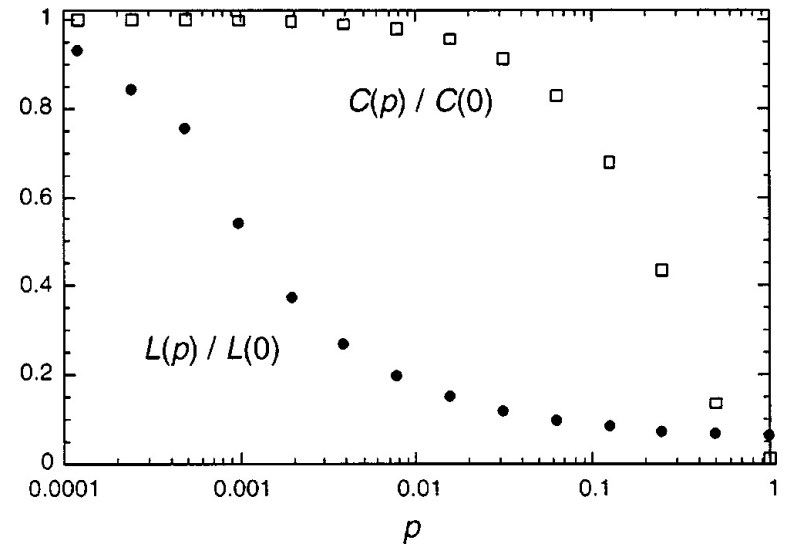
- mittlerer Abstand:

- Short-Cuts für: $\dot{p} \propto \frac{1}{NK}$

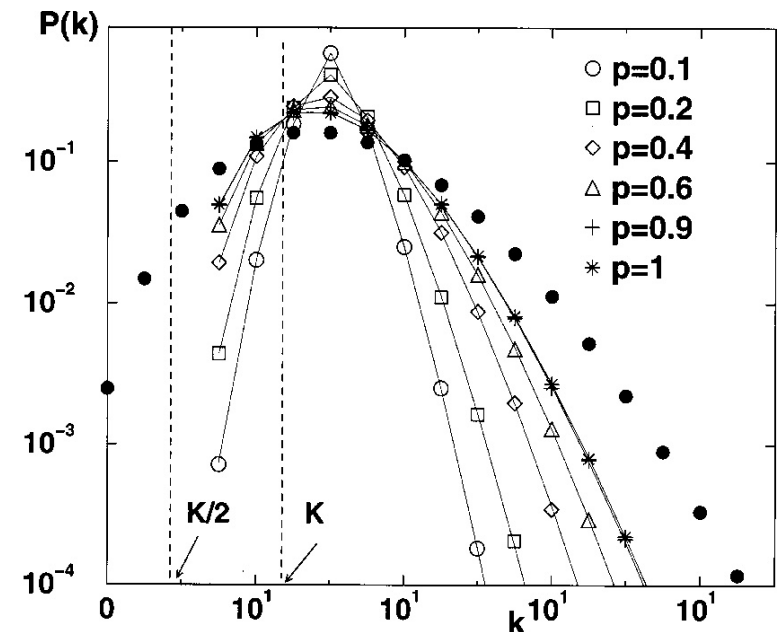
$$l(p < \dot{p}) \propto N \quad l(p > \dot{p}) \propto \ln(N)$$

- Gradverteilung

$$P(k) = \sum_{n=0}^{\min(k-K/2, K/2)} C_{K/2}^n (1-P)^n p^{K/2-n} \frac{(pK/2)^{k-K/2-n}}{(k-K/2-n)!} e^{-pK/2} a$$



Clustering K. & mittlere Weglänge v. R. Alber



Gradverteilung v. R. Alber

Scale-Free Netzwerke

BA-Modell

- hinzufügen neuer Knoten vom Grad m
- an gewichtete Knoten
- Gradverteilung:

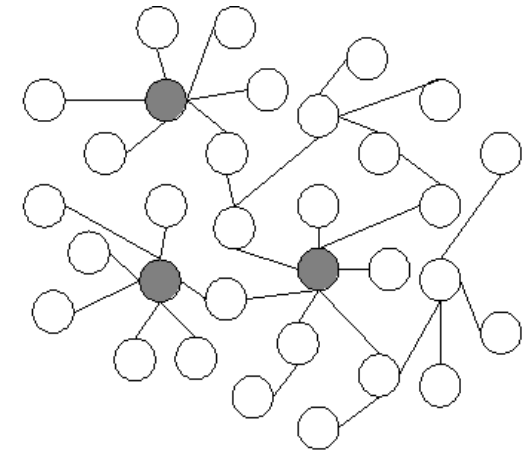
$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

$$P(ak) = bP(k)$$

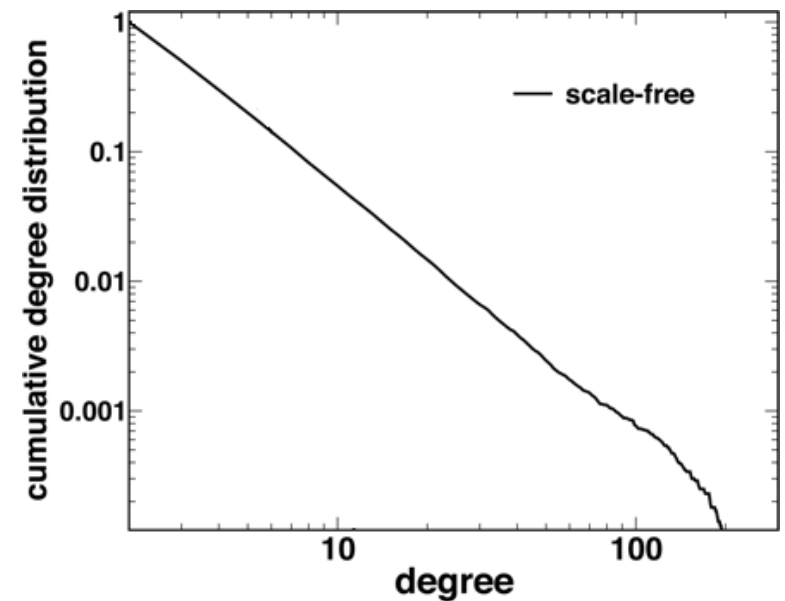
$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma_{BA} \approx 3$$

- Clustering Koeffizient:
 - keine analytische Lösung
 - ca. 5 fach höher als im ER-Modell
 - fällt lediglich potentiell mit N
- mittlerer Abstand:
 - Analytische Lösung ungenügend

$$l \propto \ln(N - B) + C$$

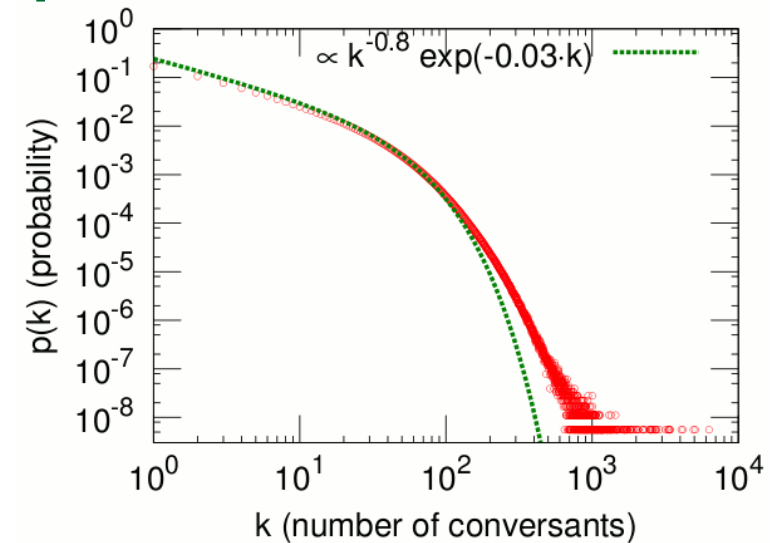


Clustering in Scale-Free Netz.

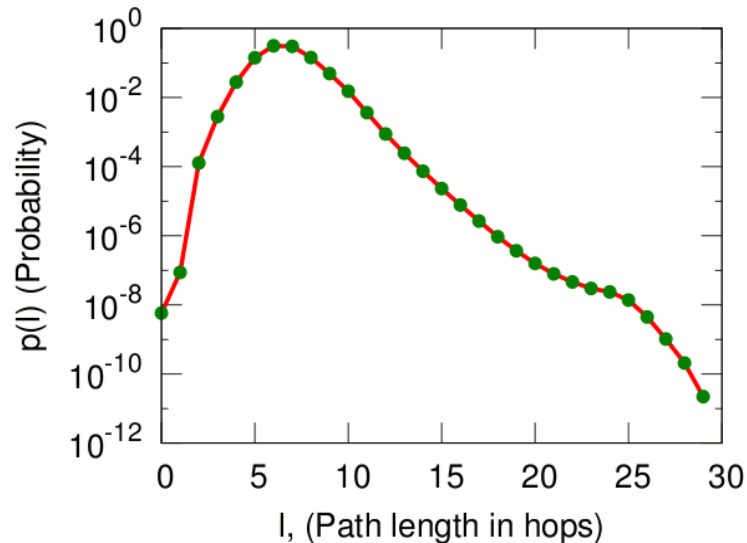


Six degrees of Separation

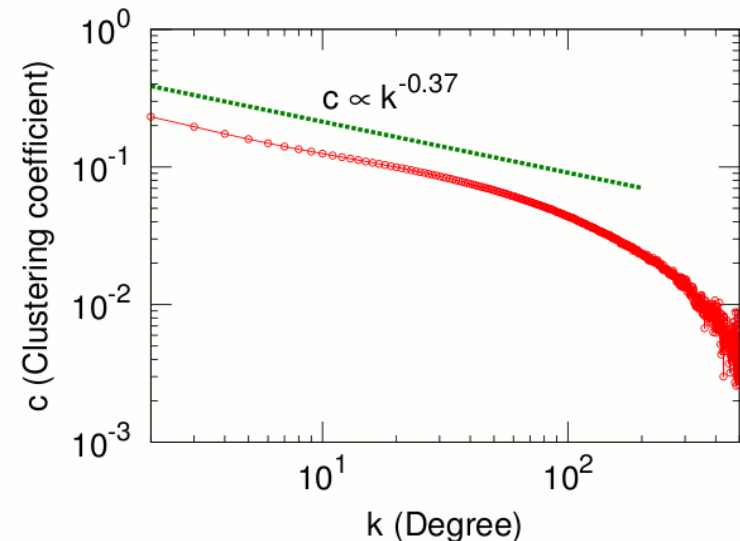
- Small-World Charakter
- Gradverteilung:
 $p(k) = k^{-0,8} e^{-0,03k}$
- mittlere Wegläng:
 $l = 6,6$
- Clustering Koeffizient:
 $c = k^{-0,37}$



Gradverteilung von E. Horvitz



Mittlere Weglänge von E. Horvitz



Clustering Koeffizient von E. Horvitz

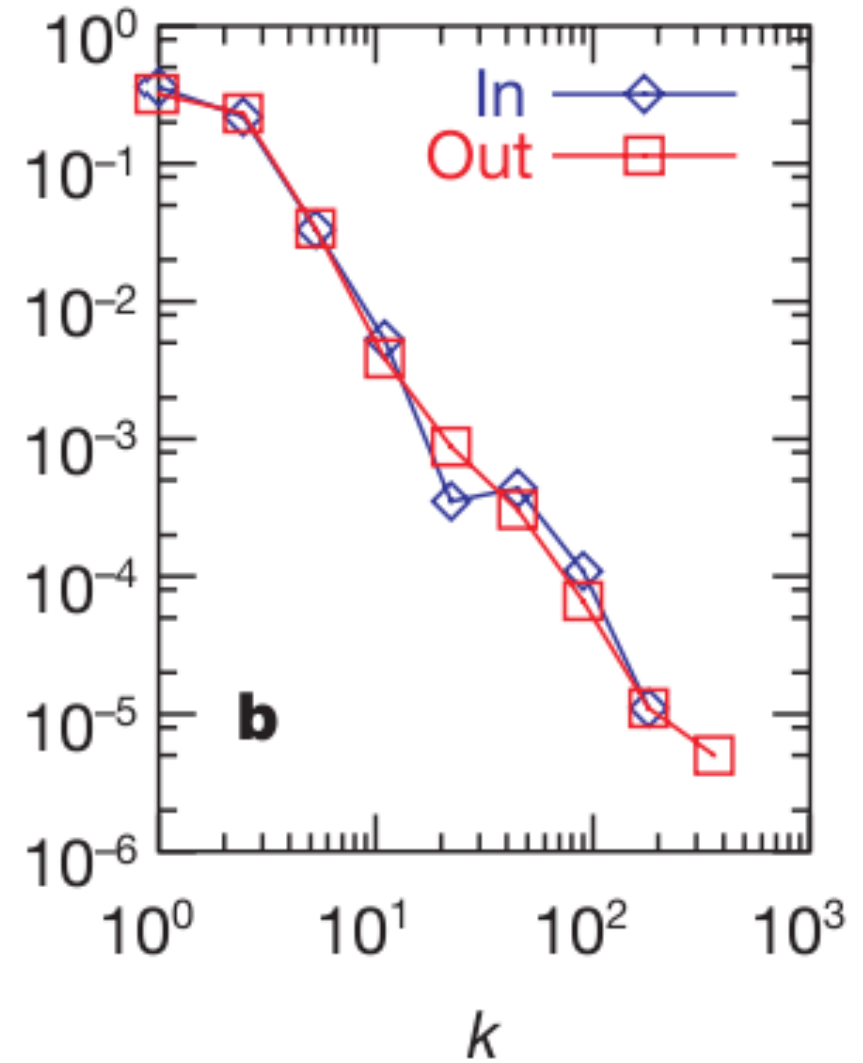
Zellulärer Stoffwechsel

Kolibakterie

- Small-World Charakter
- Gradverteilung:

$$P(k)_{in} \propto k^{-2,2} \quad P(k)_{out} \propto k^{-2,2}$$

- Clustering Koeffizient:
leider nicht untersucht
- Mittlere Weglänge:
 $l \sim 3,3$



Gradverteilung von H. Jeong

Ausblicke

- Stabilität von Netzwerken

	ER artiges Netz	WS o. BA artiges Netz
zufälliges entfernen	Gefahr der Fragmentierung	unempfindlich
gezieltes entfernen	unempfindlich	Wegfall großer Strukturen

Literaturangaben

- Reka Alber, Albert-Lazio Barabasi: Reviews on modern Physics (2002)
Statistical mechanics of complex networks
- Heiko Hotz: Diplomarbeit (2008)
Evolutionäre Spieltheorie auf komplexen Netzwerken
- Eric Horvitz, Jure Leskovec: Microsoft (2007)
Planetary-Scale Views on an Instant-Messaging Network
- H. Jeong: Nature (2000)
The large-scale organization of metabolic networks

Abbildungsnachweise

- Folie 3: 1. Laurens van Lieshout: Wikipedia - Six degrees of separation
2. H. Jeong: The large-scale organization of metabolic networks
- Folie 6: 1. Reka Alber: Statistical mechanics of complex networks
2. unbekannt: Wikipedia
- Folie 7: 1. unbekannt: Wikipedia
2. unbekannt: von Marta erhalten
- Folie 8: Reka Alber: Statistical mechanics of complex networks
- Folie 9: Eric Horvitz: Planetary-Scale Views on an Instant-Messaging Network
- Folie 10: H. Jeong: The large-scale organization of metabolic networks