



R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 10

Tutoriumsaufgabe 10.1 *Stokesscher Satz 1*

Gegeben sei ein Kegel mit der Mantelfläche (in Zylinderkoordinaten)

$$\Sigma = \{\vec{r}(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(1 - \rho/a); z, \rho \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Die Grundfläche mit Radius a liegt also in der xy -Ebene, und in z -Richtung hat er die Höhe h .

Verifizieren Sie den Stokesschen Satz

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

für das Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$ durch Berechnung des Flusses durch den Kegelmantel Σ und des Linienintegrals entlang der Kegelöffnung $\partial\Sigma$.

Aufgabe 10.2 *Stokesscher Satz 2*

Es sei eine Fläche Σ gegeben durch $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0, z \geq 0\}$. Verifizieren Sie den Stokesschen Satz, Gl. (1), für die Funktion $\vec{f} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10.3 *Magnetischer Dipol*

Das Vektorpotential \vec{A} eines statischen magnetischen Dipols mit dem konstanten Dipolmoment \vec{m} lautet

$$\vec{A} = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (2)$$

Hierbei ist μ_0 eine Konstante zur korrekten Festlegung der Dimension. Berechnen Sie das magnetische Dipolfeld $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

Hinweis: Es ist hilfreich, die in Aufgabe 6.5 c), d) gegebenen Identitäten zu benutzen.

Aufgabe 10.4 *Magnetischer Fluss durch eine Fläche*

Gegeben sei der Potentialvektor

$$\vec{A} = \left(xz - \frac{y^3}{3}, -yz + \frac{x^3}{3}, 0 \right). \quad (3)$$

- a) Wie lautet das entsprechende magnetische Feld $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$?
- b) Berechnen Sie den Fluss $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{F}$ des Feldes durch die Oberfläche einer Halbkugel (incl. Boden) mit Radius a und $z \geq 0$ ($d\vec{F}$ ist hier das Flächenelement, um Verwechslungen mit dem Vektorpotential zu vermeiden). Die Bodenfläche der Halbkugel liege in der xy -Ebene, und ihre Rundung sei zur positiven z -Achse gerichtet.
- c) Benutzen Sie den Satz von Gauss, um das Ergebnis zu überprüfen.

Aufgabe 10.5 *Vektorintegrationen*

Gegeben sei die asymmetrische Pyramide

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 - \frac{2}{3}x, 0 \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}x \right\}$$

und das Vektorfeld $\vec{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z^2 \\ x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$.

- a) Wie lautet der aus dem Vektorfeld resultierende Fluss durch die Oberfläche ∂V der Pyramide?
- b) Welchen Wert hat das Linienintegral entlang der geschlossenen Kurve Γ rund um die geneigte Fläche der Pyramide?

Abgabe: Dienstag, 15.01.2008, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).