Stringtheorie I
Prof. Dr. Lüst

Übungsblatt 3

Mit Hilfe der bereits entdeckten Symmetrien ist es lokal immer möglich die Metrik auf der Weltfläche als *minkowskisch* zu wählen, $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$.

1) Betrachte nun die Polyakov-Wirkung in konformer Eichung

$$S_P = -\frac{T}{2} \int_M d\tau d\sigma \, \eta_{ab} \, \partial^a X^\mu \partial^b X_\mu .$$

Zeige, dass der Ausdruck

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \eta_{ab} \eta^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu$$

den Strom für Translationsinvarianz darstellt und dass er erhalten ist

$$\partial^a T_{ab} \, .$$

2) Die Parametrisierungsinvarianz erlaubt uns die Koordinatentransformation $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ durchzuführen, wobei $\sigma^\pm$ konforme Koordinaten heißen. Wie lauten die Operatoren $\partial_\pm$?

(Tipp: $\partial_\pm \sigma^\pm = 1$)

Berechne nun die Polyakov-Wirkung in der konformen Eichung, zeige also

$$S_P^{konf} = T \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_- X^\mu \partial_+ X \mu.$$

3) Ausgehend von der Invarianz der “Länge” $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ berechne die Komponenten der Metrik in konformen Koordinaten, $g_{+-} = g_{-+} = -1/2$, $g_{++} = g_{--} = 0$, sowie die Inversen.

4) Ausgehend von den alten Komponenten des Energie-Impuls-Tensors T finde nun die Komponenten in den neuen Koordinaten,

$$\begin{aligned}
T_{++} &= \partial_+ X \partial_+ X = \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}), \\
T_{--} &= \partial_- X \partial_- X = \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}), \\
T_{+-} &= 0, \\
T_{-+} &= 0.
\end{aligned}$$

5) Die Erhaltung obigen Stromes schreibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\partial_- T_{++} + \partial_+ T_{-+} &= 0, \\
\partial_+ T_{--} + \partial_- T_{+-} &= 0.
\end{aligned}$$