WS 2004/2005
03.02.05

Stringtheorie I
Prof. Dr. Lüst

Übungsblatt 12

Viel Arbeit haben wir in Konsistenzbedingungen investiert, um die Stringtheorie richtig zu defienieren. In diesem letzten Übungblatt wollen wir weitere Aussagen dieser Theorie gewinnen anhand von Streuamplituden. Für die Veranschaulichung einer 4-Punkt-Amplitude ist das unten stehende Bild ganz hilfreich:

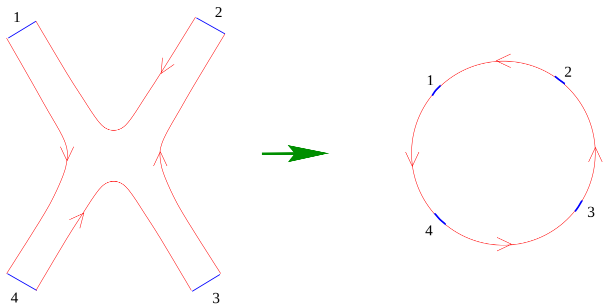

Figure 1: 4-Punkt-Amplitude und entsprechende konforme Abbildung auf eine Disk. Die Zahlen bezeichnen dabei die Vertices für die involvierten Strings.

Die Weltfläche wird dabei auf die Disk abgebildet. Der grüne Pfeil ist die allseits bekannte konformen Symmetrie die uns die Abbildung ermöglicht. Anschließend wird die Disk auf die obere Halbebene abgebildet, wobei die Vertices alle auf der reellen Achse liegen.

Nun müssen wir uns gedanken machen über die genaue Definition der erwähnten Vertices. Diese sind String-Zustände ϕ , also genügen sie folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= \bar{L}_n|\phi\rangle = 0 \\ (L_0 - 1)|\phi\rangle &= (\bar{L}_0 - 1)|\phi\rangle = 0 \\ (L_0 - \bar{L}_0)|\phi\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Vermutung liegt nahe die Zustände als konforme Felder anzusetzen

$$|\phi\rangle = \phi(0)|0\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0} \phi(z,\bar{z})|0\rangle.$$

Somit können wir bereits das String-Spektrum mit Operatoren der konformen Feldtheorie wiedergeben. Der niedrigste Zustand des geschlossenen Strings, das skalare Tachyon mit Impuls k^μ, ist

$$|k\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0} : e^{ik_\mu X^\mu} : |0\rangle.$$

1) Mit den in der Letzten Übung gerechneten Operator-Produkt-Entwicklungen fordere die Bedingungen in Gl. (1) und zeige dass $k^2 = 2$ und somit wie erwartet für das Tachyon, $m^2 = -2$ ist.

2) Wir definieren zunächst den Impulsoperator (für den holomorphen Teil) als

$$\alpha_0^\mu = i \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial X^\mu(z).$$

Zeige, dass in der Tat gilt:

$$\alpha_0^\mu |k\rangle = k^\mu |k\rangle.$$

Benutze dabei die Definition von $|k\rangle$ als konformen Operator.

Wir sind nun in der Position eine Tachyon-Amplitude auszurechnen. Sie wird formell (für den 3-Punkt-Fall) gegeben durch

$$S_{D_2}(k_1, k_2, k_3) = g_0^3 e^{-\lambda} \langle : c^1 e^{ik_1 \cdot X}(y_1) :: c^2 e^{ik_2 \cdot X}(y_2) :: c^3 e^{ik_2 \cdot X}(y_3) : \rangle + (k_2 \leftrightarrow k_3) \tag{2}$$

Dabei bedeuten c^1, c^2, c^3 die Geister. Sie sind verantwortlich fuer die Wahl der Eichung. Somit sind wir in der Lage die Position **dreier** Vertices auf der reellen Achse zu fixieren, nicht jedoch ihre zyklische Reihenfolge, deswegen der Term $(k_2 \leftrightarrow k_3)$. g_0 ist die Kopplungskonstante des Offenen Strings, einmal für jeden Vertex, $e^{-\lambda}$ ist die Eulerzahl und bestimmt das Geschlecht der Fläche.

Mit den Erwartungswerten

$$\langle c(y_1)c(y_2)c(y_3)\rangle = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)$$

und

$$\langle \prod_j e^{ik_j \cdot X}(y_j)\rangle = \prod_{i<j} |y_i - y_j|^{k_i \cdot k_j}$$

berechne die Amplitude (2). Verwende dabei die Impulserhaltung $\sum k_i = 0$ und die Relation $k_i^2 = 2$.

3) Die Streuamplitude für vier Tachyonen ist gegeben durch

$$S_{D_2}(k_1, k_2, k_3, k_4)$$
$$= g_0^4 e^{-\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dy_4 \langle \prod_{j=1}^{3} : c^j(y_j) e^{ik_j \cdot X(y_j)} :: e^{ik_4 \cdot X(y_4)} :\rangle + (k_2 \leftrightarrow k_3)$$

Der vierte Vertex ist nicht mehr fixiert, also müssen wir über seine Position integrieren. Schreibe die Erwartungswerte und berechne das Integral. Spalte dazu den Integrationsbereich in $(-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [0, 1] \cup [1, \infty)$ auf und führe alles auf das Euler-Beta-Integral zurück, mit der Subtitition $x' = \frac{1}{x}$. Wähle als Positionen für die y_i die Punkte $\{0, 1, \infty\}$. Die Impulserhaltung und die Massenrelationen sind stets im Hinterkopf zu behalten.

4) Schreibe das Ergebnis in den Mandelstamvariablen um. Diese sind gegeben durch

$$s = (k_1 + k_2)^2 \quad t = (k_1 + k_3)^2 \quad u = (k_1 + k_4)^2$$
$$s + t + u = \sum m_i = -8$$

Formelsammlung

Das Euler-Beta-Integral ist gegeben durch

$$B(a, b) \equiv \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 dy\ y^{a-1}(1-y)^{b-1},$$

wobei $\Gamma(x)$ die bekannte Gamma-Funktion ist, mit der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.