c) Einfach polarisierbare Kontinuum (Lorentz-Drude-Model)

Motivation

Betrachte eine Ansammlung von harmonisch gebundenen Ladungen

k Federkonstante + Dämpfung γ

m, q (Masse, Ladung)

$$m\ddot{\vec r} = \underbrace{-k\vec r}_{\text{harmonisch gebunden}} + \underbrace{q\cdot\vec E}_{\text{elektr. Kraft}} - m\gamma\underbrace{\vec v}_{=\dot{\vec r}}$$

Reibung (Dämpfung)

Sei n die Dichte der Ladungen. Dann

$$\vec j_i = nq\vec v = +\partial_t \vec P$$

$$\partial_t \vec j_i = n\Big(-\frac{k}{m}\underbrace{q\vec r}_{\vec d} + \frac{q^2}{m}\vec E - \gamma q\vec v\Big)$$

Dipolmoment

$\vec P = n\cdot\vec d$ Polarisation

$$+\partial_t^2\vec P = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{=\omega_0^2}\vec P + \underbrace{\frac{nq^2}{m}}_{\equiv\omega_p^2/4\pi}\vec E - \gamma\partial_t\vec P$$

Eigenfrequenz Plasmafrequenz

$$\boxed{\partial_t^2\vec P + \gamma\partial_t\vec P + \omega_0^2\vec P = \omega_p^2\,\vec E/4\pi}$$

Diese Gleichung ist nun unser Modell eines einfach polarisierbaren Mediums, d.h. die konstituierende Gleichung. (Lorentz-Drude Model)

Fourier analyse

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\, \vec{P}(\vec{k},\omega)$$

Hier nur zeitliche Fouriertrafo. Modell ist lokal im Ort

$$-\omega^2 \vec{P}(\omega) - i\gamma\omega \vec{P}(\omega) + \omega_0^2 \vec{P} = \omega_p^2 \vec{E}/4\pi$$

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2/4\pi}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$ komplexe Suszeptibilität!

Statische Suszeptibilität

$$\chi(\omega=0) = \chi = \omega_p^2/\omega_0^2 4\pi > 0$$

gültig falls $\omega_0 \gg \omega$ *)

<u>Grössenordnung von χ:</u>

$\omega_0 \sim \frac{v}{l}$; atomare Geschw. und Länge (v, l)

$$\chi \sim \frac{nq^2 l^2}{m v^2} \sim \frac{nq^2/l}{m v^2}\, l^3$$

$mv^2 \sim \frac{q^2}{l}$ kin. Eng $\sim$ Coulomb.

$$\chi \sim n\, l^3$$

Anzahl der Elektronen in einem atomaren Volumen

Daher hat man für dichte Materie

$$\chi \sim 1$$

---

*) Die Größenordnung der atomaren Frequenzen ω_0 erhält man aus den Frequenzen der emittierten Spektrallinien. Für sichtbares Licht ($\lambda \approx 6000$ Å) ergibt sich: $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \approx 3 \cdot 10^{15}$ Hz. Statische Näherung ist daher gültig für Radio- und Radarwellen, nicht aber für Licht und Röntgenwellen.

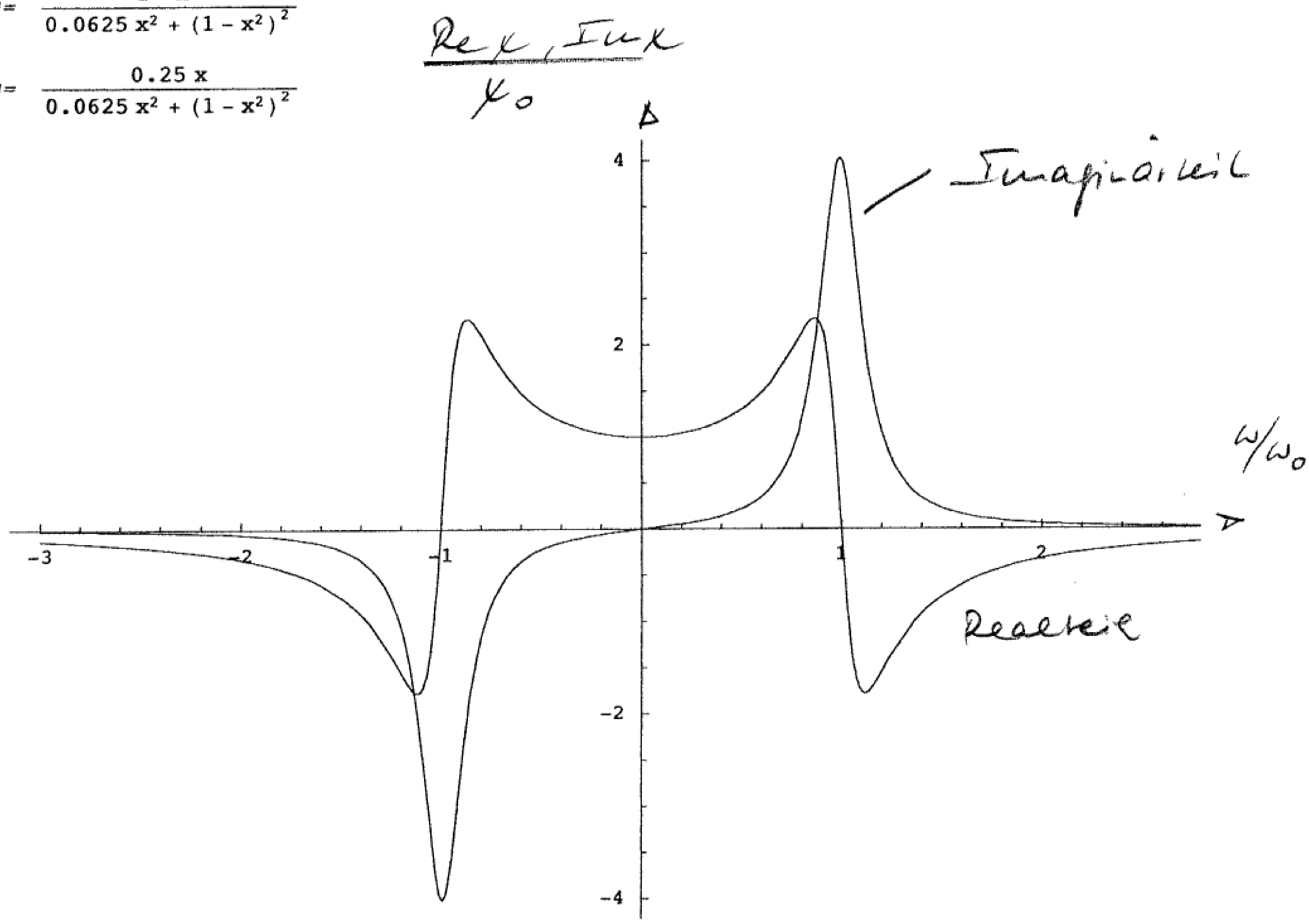
$$ga = \hat{\Gamma}$$
$$x = \hat{\omega}$$

```
In[55]:= ga = 0.25
         f = (1-x^2) / ((1-x^2)^2 + (ga*x)^2)
         g = ga x / ((1-x^2)^2 + (ga*x)^2)
         graf := Plot[f, {x, -3, 3}, DisplayFunction → Identity]
         grag := Plot[g, {x, -3, 3}, DisplayFunction → Identity]
         Show[graf, grag, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

Out[55]= 0.25

Out[56]= $\frac{1 - x^2}{0.0625\, x^2 + (1 - x^2)^2}$

Out[57]= $\frac{0.25\, x}{0.0625\, x^2 + (1 - x^2)^2}$



Out[60]= - Graphics -

Skizze von Real- und Imaginärteil von χ

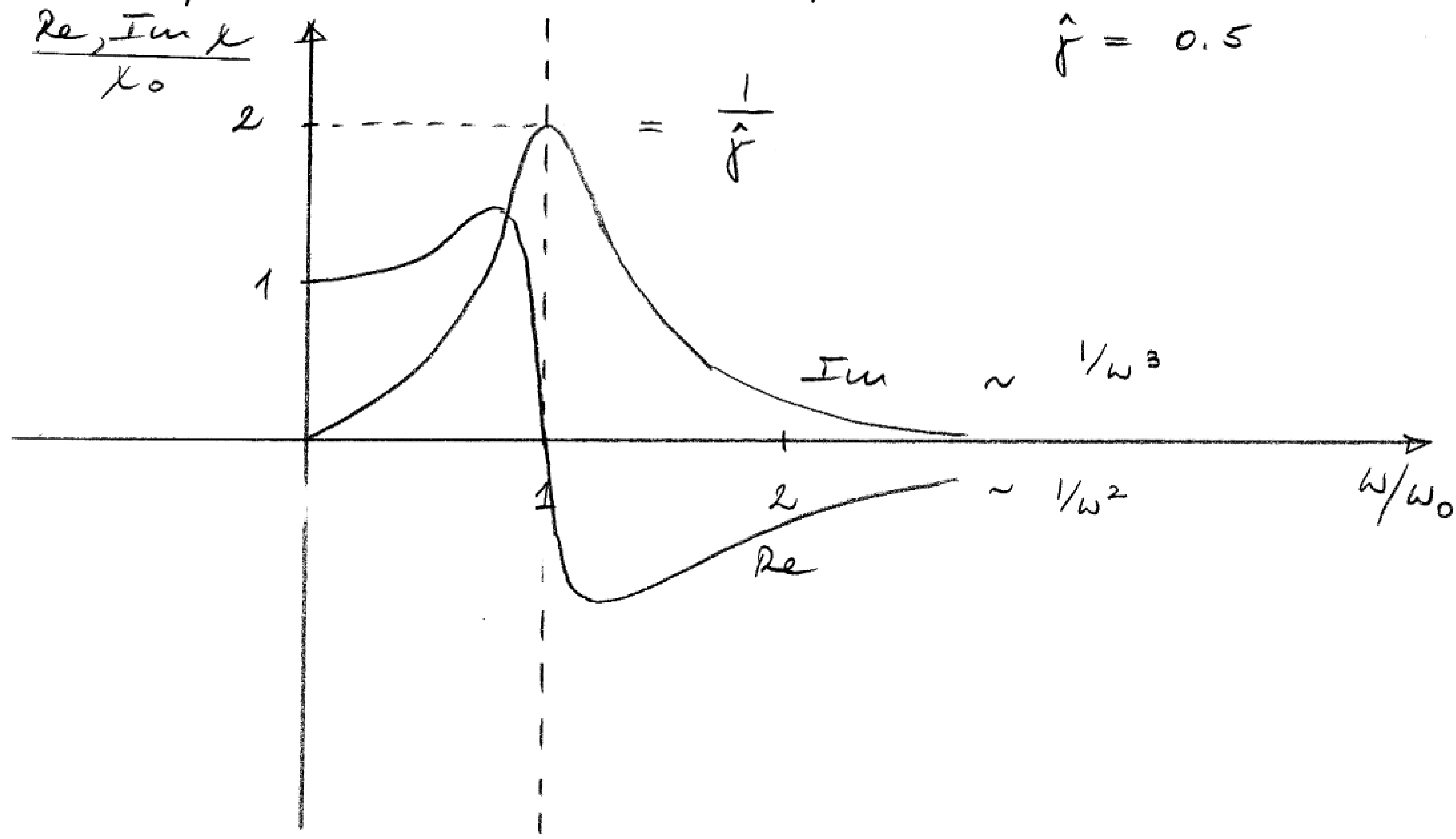
$$4\pi\chi = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\,(\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega)$$

$$4\pi\,\mathrm{Re}\,\chi = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} = (4\pi\chi_0)\,\frac{1-\hat\omega^2}{(1-\hat\omega^2)^2+(\hat\gamma\hat\omega)^2}$$

$$4\pi\,\mathrm{Im}\,\chi = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} = (4\pi\chi_0)\,\frac{\hat\gamma\hat\omega}{(1-\hat\omega^2)^2+(\hat\gamma\hat\omega)^2}$$

wobei $\hat\omega = \omega/\omega_0$ und $\hat\gamma = \gamma/\omega_0$ die Frequenz und Dämpfung in Einheiten der atomaren Frequenz sind; $4\pi\chi_0 = (\omega_p/\omega_0)^2$ ist die statische Suszeptibilität: $\chi_0 = \chi(\omega=0)$.

Realteil ist sym. in ω.
Imaginärteil ist anti-sym. in ω.



folgt aus Symmetrie

Resonanz

Außerhalb der Resonanz steigt $\mathrm{Re}\,\chi$ mit ω an; dies bezeichnet man als normale Dispersion. In der Nähe der Resonanz hat man anomale Dispersion ($\chi\downarrow$ mit $\omega\uparrow$)

Verallgemeinerung

Im Volumen V befinden sich eine Dichte n von Molekülen mit jeweils Z Elektronen. Davon haben f_j die Bindungsfrequenz (Eigenfrequenz) ω_j und die Dämpfungskonstante γ_j

$$\vec{P} = n \frac{e^2}{m} \sum_j f_j \left(\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega\right)^{-1} \vec{E}$$

$$= \chi_e \vec{E}$$

Dann gilt für die frequenzabhängige DK

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + 4\pi \chi_e(\omega) \\ &= 1 + \underbrace{\frac{4\pi n e^2}{m}}_{=\omega_p^2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \end{aligned}}$$

Lorentz-Drude Formel

Es gilt der f-Summensatz $\sum_j f_j = Z$

f_j heisst Oszillatorstärke.

Mit einer geeigneten quantenmechanischen Definition der Materialparameter f_j, γ_j, ω_j liefert die Lorentz-Drude Formel eine gute Beschreibung des atomaren Beitrags zur Dielektrizitätskonstanten (DK) $\varepsilon(\omega)$.

Diskussion der Lorentz-Drude Formel

$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega)$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) \text{ gerade} \\ \mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) \text{ ungerade} \end{array}\right\}$ in ω

Im allgemeinen gilt $\gamma_j \ll \omega_j$

$\omega_j^2 - \omega^2 \quad > 0 \quad$ für $\omega < \omega_j$

$\qquad\qquad < 0 \quad$ -"- $\omega > \omega_j$

Für kleine Frequenzen ω, unterhalb der kleinsten Frequenz ω_j, tragen alle Terme in der Summe mit positivem Vorzeichen bei $\rightsquigarrow \varepsilon(\omega) > 1$.
Passiert man mit steigendem ω aufeinander folgende Eigenfrequenzen ω_j so treten in der Summe immer mehr negative Terme auf bis schliesslich die gesamte Summe negativ und damit $\varepsilon(\omega) < 1$ wird. In der näheren Umgebung der Eigenfrequenzen ω_j ändert sich $\varepsilon(\omega)$ stark (Bei ω_j verschwindet der Realteil und der Imaginärteil wird maximal)

Normale Dispersion: $\varepsilon(\omega)$ steigt mit ω

Anomale Dispersion: $\varepsilon(\omega)$ fällt mit ω

Anomale Dispersion findet man typisch in der Nähe von Resonanzen.

Niederfrequenzverhalten ; $\omega \to 0$

Falls alle $\omega_j \neq 0$, dann

$$\varepsilon(0) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} = \varepsilon_0$$

(statische DK)

Falls ein $\omega_j = 0$ (siehe Drude Modell für Leiter)

dann würde $\varepsilon(\omega) \to \infty$ für $\omega \to 0$

Sei f_0 Anteil der ungebundenen Elektronen mit $\omega_0 = 0$, dann gilt für niedrige Frequenzen

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \underbrace{i\,\omega_p^2 \frac{f_0}{(\gamma_0 - i\omega)}}_{\text{'freie' Elektronen}}$$

$$= \varepsilon_0 + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Hochfrequenzverhalten

$$\varepsilon(\omega) \to 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \underbrace{\sum_j f_j}_{= Z}$$

$$= 1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\omega^2}$$

$$\tilde{\omega}_p^2 = 4\pi \frac{n Z e^2}{m}$$ Plasmafrequenz

nZ = Ladungsdichte aller Elektronen

3.3.2. Homogene Leiter

(a) Ideales Metall

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{E} = 0}$

(Motivation: frei bewegliche Ladungen)

Aus den Maxwellgleichungen folgen wir dann:

- Coulomb: $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho_e + \rho_i) = 0$

  $\curvearrowright \rho_e = -\rho_i$

  d.h. die induzierten Ladungen kompensieren die externen Ladungen (ideale Ladungskompensation)

- Faraday: $\partial_t \vec{B} = 0$

  d.h. statisches Magnetfeld

(b) Ohmscher Leiter

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{j}_i = \sigma \vec{E}(\vec{x}, t)}$

$\sigma > 0$ heisst die elektrische Leitfähigkeit

Wir haben hier angenommen, daß das Magnetfeld keine Rolle spielt; siehe aber Hall-Effekt.

Um Ströme in einem Ohmschen Leiter aufrecht zu erhalten braucht man externe Quellen (Batterie, zeitlich veränderlicher magnetischer Fluß (Dynamo), ...).
Wir definieren

$$\vec{E}^{(e)} := \frac{1}{\sigma} \vec{f}_e$$

so daß $q\cdot(\vec{E} + \vec{E}^{(e)})$ die auf eine Ladung q wirkende Gesamtkraft ist. Unabhängig von der Art der Quelle gilt ($\operatorname{rot} \vec{E} = 0$)

$$\oint (\vec{E} + \vec{E}^{(e)})\, d\vec{l} = \oint \vec{E}^{(e)}\, d\vec{l} \equiv \mathcal{E}$$

Man bezeichnet $\mathcal{E}$ als „elektromotorische Kraft" um auszudrücken, daß $\vec{E}^{(e)}$ der Antrieb („Motor") für den Stromfluß im Leiter ist.

Innerhalb einer idealen Quelle für eine eine elektromotorische Kraft gilt wegen $\sigma = \infty$, daß die Gesamtkraft auf eine Ladung Null ist: $\vec{E} = -\vec{E}^{(e)}$. Damit folgt für die Spannungdifferenz zwischen den Polen (der Batterie)

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}^{(e)} d\vec{l}$$

$$= \oint \vec{E}^{(e)} d\vec{l} = \mathcal{E}$$

da $\vec{E}^{(e)} = 0$
außerhalb der Quelle (Batterie)

Wir untersuchen nun die Folgerungen des Energieerhaltungssatzes für Ohmsche Leiter

$$\underbrace{\frac{d}{dt} U}_{\substack{\text{zeitliche}\\ \text{Änderung}\\ \text{der Feldenergie}}} = - \underbrace{\oint \vec{S} \cdot d\vec{f}}_{\text{Abstrahlung}} - \underbrace{\int (\vec{j}_i + \vec{j}_e) \cdot \vec{E} \, dV}$$

$$\left(\int \vec{j}_e \cdot \vec{E} \, dV + \underbrace{\int \vec{j}_i \, \vec{E} \cdot dV}_{\substack{\text{abgegebene}\\ \text{Leistung an Materie}\\ = q_i(x,t)}} \right)$$

$$q_i(x,t) := - \vec{j}_i(\vec{x},t) \, \vec{E}(x,t)$$

$$\underset{\text{Ohm'sches Gesetz}}{=} - \sigma^2 \vec{E}^2 < 0$$

d. h. ein Metall entzieht dem elek. Feld Energie („Ohmsche Verluste").

(c) Drude Modell

Ladungen in einem konstanten elektr. Feld werden beschleunigt. Die Geschwindigkeitsänderung in einem Zeitintervall Δt ist

$$\Delta v = \frac{q}{m} E \Delta t$$

Die gilt aber nur solange bis die Elektronen im Metall Stöße mit den Gitterrümpfen erleiden. Die mittlere Flugzeit zwischen zwei Stößen bezeichnen wir mit τ. Sie ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge l und der (typischen) thermischen Geschw. v_{therm} zu: $\tau = l / v_{therm}$.

Damit ergibt sich für die (zeitgemittelte) Zunahme der Geschwindigkeit $v_D = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Delta v \, dt$

$$v_D = \frac{q \cdot \tau}{2m} E \qquad \text{Driftgeschwindigkeit}$$

und folglich gilt für $j = n q v_D$

$$j = \frac{n q^2 \tau}{2m} E \equiv \sigma E \quad {}^{**)}$$

also das Ohmsche Gesetz.

---

*) Man beachte, daß Elektronen im Metall nicht in Ruhe sind sondern eine Wärmebewegung vollführen.

**) Wegen $\sigma \sim 1/v_{therm}$ nimmt σ mit steigender Temperatur ab.

Abschätzung für τ

Cu (20°C) $\quad \sigma = 5{,}4 \cdot 10^{17}\ sec^{-1}$

$$n \cong 10^{23}\ cm^{-3}$$

$$m = 9 \cdot 10^{-28}\ g$$

$$e = 5\ 10^{-10}\ esE$$

$$\Downarrow \quad \tau \approx 4 \cdot 10^{-14}\ sec$$

Man erwartet also, daß das Ohmsche Gesetz bis zu Frequenzen der Größenordnung $\omega \sim 10^{14}\ Hz$ gilt. Dies ist für Radio- und Radarquellen sicher erfüllt, nicht aber für Licht- und Röntgenquellen. Für hohe Frequenzen tritt der Dämpfungsmechanismus durch Stöße nicht in Aktion. Stattdessen findet man für ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-i\omega t}$$

$$m\,\ddot{\vec{x}} = q\,\vec{E}_0\, e^{-i\omega t}$$

und folglich mit dem Ansatz $\dot{\vec{x}} = \vec{v}_D \sim e^{-i\omega t}$

$$\vec{v}_D = \frac{q}{-im\omega}\,\vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{nq^2}{-im\omega}\,\vec{E} \quad ; \quad \sigma = i\,\frac{nq^2}{m\omega} = i\,\frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n q^2}{m}$$ heisst Plasmafrequenz

$$\approx 2 \cdot 10^{16}\ Hz$$ (fernes UV) für Festkörper

Verallgemeinerung (Drude Formel)

Konstituierende Gleichung

$$\partial_t \vec{j}_i + \underbrace{\frac{2}{\tau} \vec{j}_i}_{\text{Dämpfung}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} \qquad (*)$$

↑ Stärke der Kopplung

Zwei Materialparameter

τ : Relaxationszeit / Dämpfung

ω_p : Kopplungsstärke

Fourieranalyse

$$\vec{E}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{j}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{j}(\omega)$$

Dann ergibt sich aus $(*)$

$$\left(-i\omega + \frac{2}{\tau}\right) j(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E(\omega)$$

$$j(\omega) = \frac{\omega_p^2/4\pi}{-i\omega + 2/\tau} \qquad \text{(Drude Formel)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} +i \dfrac{\omega_p^2}{4\pi\omega} & \tau\omega \gg 1 \\[2ex] \dfrac{\omega_p^2 \tau}{4\pi \cdot 2} = \underbrace{\dfrac{nq^2\tau}{2m}}_{= \sigma_0} & \tau\omega \ll 1 \end{cases}$$

(statische Leitfähigkeit)