

T IV: Thermodynamik und Statistik
(Prof. E. Frey)

Problem set 12
Übungsklausur

Aufgabe 1: (40 Punkte)

Die folgenden Fragen sind kurz und ohne ausführliche Rechnungen zu beantworten.

- (a) Wie verhält sich die freie Enthalpie bei steigenden Druck? (Steigt – Fällt – rechtskrümmend – linkskrümmend) (2 Punkte)
- (b) Wie lauten die natürlichen Variablen der inneren Energie? Des großkanonischen Potentials? (2 Punkte)
- (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der freien Energie und der freien Enthalpie? (2 Punkte)
- (d) Wie ist die spezifische Wärme bei konstantem Volumen definiert? Geben Sie einen Zusammenhang mit Fluktuationen geeigneter Größen an. Vorfaktoren brauchen nicht angegeben werden. (2 Punkte)
- (e) Zwei Systeme mit Teilchensorten A, B befinden sich getrennt durch eine Wand in einem Container. Was lässt sich im thermischen Gleichgewicht über die Teilsysteme sagen, falls die Wand fest, teilchen-undurchlässig aber energie-durchlässig ist. Was, wenn die Wand fest, teilchen-undurchlässig für A , teilchen-durchlässig für B und energie-durchlässig ist? (3 Punkte)
- (f) Wie lautet die mittleren Besetzungszahlen für nichtwechselwirkende Bosonen/Fermionen? (2 Punkte)
- (g) Was versteht man unter extensiven und intensiven Variablen? Geben Sie jeweils zwei Beispiele an. (3 Punkte)
- (h) Wie verhalten sich die typischen Teilchenzahl-Fluktuationen um den Mittelwert in Abhängigkeit der mittleren Teilchenzahl im großkanonischen Ensemble (bei fester Temperatur und festem chemischen Potential)? (2 Punkte)
- (i) Skizzieren Sie die magnetische Suszeptibilität eines Systems identischer nichtwechselwirkender Spin $1/2$ Teilchen bei einem angelegten Magnetfeld als Funktion der Temperatur. Geben Sie die charakteristische Energieskala an und diskutieren Sie das Verhalten für tiefe und hohe Temperaturen. (4 Punkte)
- (j) Welche Zustände tragen effektiv zur kanonischen Zustandssumme bei? Wieviele gibt es davon? (3 Punkte)
- (k) M ununterscheidbare Quanten sind auf N Oszillatormoden zu verteilen. Wieviele Mikrozustände gibt es? (1 Punkt)

- (l) Geben Sie die Dispersionsrelation für nichtwechselwirkende Elektronen an. Welches charakteristische Verhalten zeigt der Elektronenbeitrag zur Wärmekapazität bei tiefen Temperaturen? (2 Pkte)
- (m) Welcher qualitative Unterschied besteht zwischen den Dispersionsrelationen von Rotonen und Phononen? Welche Konsequenz ergibt sich für den jeweiligen Beitrag zur spezifischen Wärme? (2 Pkte)
- (n) Was versteht man unter Bose-Einstein Kondensation. Geben Sie einen Zusammenhang zwischen der Temperatur, an welcher der Übergang stattfindet, und der Teilchendichte an. Numerische Vorfaktoren brauchen nicht angegeben werden. (4 Pkte)
- (o) Wie verschiebt sich das chemische Gleichgewicht von Kohlenmonoxid und Wasserstoff (CO & H_2) zu Methan und Wasser (CH_4 & H_2O) bei Druckänderung. Alle Komponenten sind hierbei in der Gasphase. (2 Pkte)
- (p) Was versteht man unter kritischen Exponenten bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung? Geben Sie zwei Beispiele für solche Exponenten und für zwei Systeme, wo ein solcher Phasenübergang stattfindet. (4 Pkte)

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Für ein System N ungekoppelter identischer quantenmechanischer Oszillatoren findet man als Energie-Eigenwerte

$$E = \sum_{k=1}^N \hbar\omega \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad n_k = 0, 1, 2, \dots$$

Berechnen Sie die Zustandssumme und die freie Energie. Diskutieren Sie die mittlere Energie, die Entropie sowie die Wärmekapazität als Funktion der Temperatur. Fertigen Sie jeweils eine Skizze an und geben Sie Grenzfälle soweit möglich analytisch an.

Aufgabe 3: *Bogolons* (25 Punkte)

Supraleiter bei tiefen Temperaturen besitzen Quasiteilchen, welche Bogoliubov folgend Bogolonen genannt werden. Die Anregungsenergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ für derartige Quasiteilchen ist gegeben durch

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = \left[\frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k_F^2) \right]^2 + \Delta^2, \quad k = |\mathbf{k}|,$$

wobei \mathbf{k} der Wellenvektor der Anregung darstellt und Δ die Energielücke bezeichnet. Die Bogolonen sollen näherungsweise als nichtwechselwirkende Fermionen mit zwei verschiedenen Spinzuständen betrachtet werden. Da die Zahl der Quasiteilchen nicht erhalten ist, gilt für das chemische Potential $\mu = 0$. Begründen Sie, dass bei tiefen Temperaturen das großkanonische Potential (freie Energie) durch Anregungen mit Wellenvektoren in der Nähe von k_F dominiert wird. Entwickeln Sie die Anregungsenergie in Potenzen von $k - k_F$ und berechnen Sie die Zahl der Anregungen und ihren Beitrag zur mittleren Energie sowie der spezifischen Wärme in führender nichttrivialer Ordnung bei tiefen Temperaturen.

Hinweis: Bogolonen stellen das Fermionen-Analogon zu Rotonen dar.

Aufgabe 4: (30 Punkte)

Die empirische Zustandsgleichung eines *Dieterici*-Fluids ist gegeben durch

$$P = \frac{k_B T}{v - b} \exp\left(-\frac{c}{v k_B T}\right), \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Zeigen Sie, daß es einen kritischen Punkt gibt und bestimmen Sie v_c, T_c, P_c . Diskutieren Sie die kritische Isotherme $T = T_c$ in der Nähe von $v = v_c$. Entwickeln Sie die Zustandsgleichung nahe des kritischen Punktes in führender nichttrivialer Ordnung. Zeigen Sie, dass in reduzierten Variablen

$$\Pi = \frac{P - P_c}{P_c}, \quad t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad \phi = \frac{v - v_c}{v_c}$$

gilt

$$\Pi = 3t - 2t\phi - \frac{2}{3}\phi^3 + \mathcal{O}(t\phi^2, \phi^4)$$

Bestimmen Sie die Abhängigkeit der freien Energie und des chemischen Potentials von T und v in der Umgebung von T_c, v_c . Unterhalb von T_c ist eine Maxwellkonstruktion erforderlich. Welche Bedingungen ergeben sich formal durch Minimierung der freien Energie des aus flüssiger und gasförmiger Phase zusammengesetzten Systems (kein Beweis erforderlich)? Bestimmen Sie die Koexistenzkurve nahe des kritischen Punktes. [Antwort: $\phi_g = -\phi_l = \sqrt{-3t}$.]