WiSe 2007/08 14.12.2007

**Prof. Dr. T. Franosch**
Marta Balbás Gambra/Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

# R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

## Übungsblatt 9

**Tutoriumsaufgabe 9.1** *Trägheitsmoment einer Kugel*

Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel mit Radius $R$ in Zylinderkoordinaten.

**Tutoriumsaufgabe 9.2** *Fluss eines Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Kegels*

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} = (z, y, z+1)$. Berechnen Sie den Fluss $\phi = \int \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ durch die Oberfläche des Kegels $K = \{(x,y,z)|0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$.

a) Berechnen Sie den Fluss durch den Kegelmantel und den Grundkreis $G$ zuerst mit einer geigneten Parametrisierung.

b) Benutzen Sie nun den Gaußschen Integralsatz, um den Fluss über ein Volumenintegral zu berechnen.

**Aufgabe 9.3** *Trägheitsmoment*

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines in $z$-Richtung orientierten Zylinders mit Radius $R$, Höhe $h$ und Schwerpunkt im Ursprung bei Drehung um die $x$-Achse

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels mit Höhe $h$ und Grundkreisradius $R$ um seine Symmetrieachse.

**Aufgabe 9.4** *Volumen eines Torus*

Einen Torus kann man sich vorstellen als den Körper, der bei der Rotation eines Kreises in der $x$-$z$-Ebene um die $z$-Achse entsteht. Er läßt sich in kartesischen Koordinaten durch $\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = S^2$ beschreiben, wobei $R$ der Abstand des Zentrums des Kreises zur $z$-Achse und $S$ der Radius des Kreises sind. Eine geignete Parametrisierung des Torus ist durch folgenden Koordinaten gegeben:

$$
\begin{aligned}
x(r,\varphi,\theta) &= (R + r\cos\varphi)\cos\theta && (1)\\
y(r,\varphi,\theta) &= (R + r\cos\varphi)\sin\theta && (2)\\
z(r,\varphi,\theta) &= r\sin\varphi, && (3)
\end{aligned}
$$

wobei $0 \leq r \leq S$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $r$ und $\varphi$ stellen den Radius und den Winkel des rotierenden Kreises dar, während $\theta$ dem Winkel der Drehung um die $z$-Achse entspricht.

a) Benutzen Sie die gegebene Parametrisierung, um das Volumen des Torus zu berechnen.

b) Berechnen Sie nun das Volumen als das erzeugte Volumen eines rotierenden Kreises.

c) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus.

**Aufgabe 9.5** *Rotationsvolumen*

a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Funktion $f(x) = 1/x$ mit $1 \leq x \leq a$ erzeugt wird. Für $a \to \infty$ ergibt sich das Paradoxon, dass das Volumen endlich bleibt, obwohl die Oberfläche unendlich wird. Der Körper ist als Gabriels Horn oder Torricellis Trompete bekannt.

b) Berechnen Sie das Volumen, das durch die um die $x$-Achse rotierende Gerade $f(x) = mx$ erzeugt wird, für $0 \leq x \leq h$. Welcher Körper ergibt sich?

**Aufgabe 9.6** *Fluss des Coulombisches Potential*

Gegeben sei das Potential einer homogenen geladenen Kugel

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & r < R \\ \frac{1}{r} & R \leq r \end{cases} \tag{4}$$

a) Berechnen Sie das elektrische Feld in geeigneten Koordinaten.

b) Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche der Sphäre mit Radius $R_0$ für $R_0 < R$ und $R_0 > R$, wo $R$ das Radius der Sphäre ist.

c) Benutzen Sie den Satz von Gauss um die vorherigen Ergebnisse zu überprüfen.
Hinweis: Beachten Sie, dass für die Berechnung von $div\vec{E}$ für $R_0 > R$ folgendes nützlich ist:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{5}$$

oder anders formuliert:

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{r}\operatorname{div}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -4\pi \tag{6}$$

wenn das Volumen die Ursprung enthält.

*Abgabe:* **nach den Ferien: Dienstag, 08.01.2008**, *bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).*