WiSe 2007/08 7.12.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Marta Balbás Gambra/Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 8

Tutoriumsaufgabe 8.1 *Zweidimensionale Bewegung in Polarkoordinaten, Teil 1*

Für einen Körper der Masse μ mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ im dreidimensionalen Raum sei die folgende Bewegungsgleichung gegeben:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \tag{1}$$

a) Eine wichtige Hilfe zum Verstehen und Lösen von Differentialgleichungen ist es, Konstanten zu finden, die in ihnen „versteckt" sind. Zeigen Sie, dass aus Gl. (1) folgt

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\mathcal{L}}, \quad \text{mit } \vec{\mathcal{L}} \text{ konstant.} \tag{2}$$

$\vec{\mathcal{L}}$ wird als Drehimpulsintegral bezeichnet.
   (i) Was können Sie aus Gl. (2) für $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ schließen?
   (ii) Was ist die geometrische Interpretation von $\mathcal{L} = |\vec{\mathcal{L}}|$?

b) Wir beschränken uns im folgenden darauf, die durch Gleichung (1) gegebene Bewegung in der *zweidimensionalen Ebene* zu beschreiben. Dazu führen wir Polarkoordinaten ein, $\vec{r}(t) \to (r(t), \theta(t))$, wobei sich der Winkel $\theta(t)$ auf eine beliebige, feste Referenzachse bezieht. Die Einheitsvektoren seien $\hat{e}_r(t)$ und $\hat{e}_\theta(t)$. $\hat{e}_r(t)$ zeigt immer in Richtung des Ortsvektors, $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r(t)$, und sei gegeben durch $\hat{e}_r(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$. Wie lauten

$$\hat{e}_\theta(t), \quad \dot{\vec{r}}(t), \quad \ddot{\vec{r}}(t) \quad \text{und} \quad |\vec{\mathcal{L}}|? \tag{3}$$

c) Für die Fortsetzung der Aufgabe in 8.3 brauchen Sie die Substitution $u = 1/r$. Zeigen Sie durch Anwendung der Kettenregel, dass

$$\frac{dr}{dt} = -\mathcal{L}\frac{du}{d\theta}, \qquad \text{und} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -\mathcal{L}^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}. \tag{4}$$

Tutoriumsaufgabe 8.2 *Flächenintegration 1*

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\iint_G f(x,y)dxdy. \tag{12}$$

der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2-x\}$

Aufgabe 8.3 *Zweidimensionale Bewegung in Polarkoordinaten, Teil 2*

a) Setzen Sie das Ergebnis für $\ddot{\vec{r}}(t)$ aus Gl. (3) in Gl. (1) ein. Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie zwei skalare Gleichungen.

Die Gleichung für $r(t)$ können Sie lösen, indem Sie die Substitution $u = 1/r$ durchführen und die Zeit t mit Hilfe der Konstanten $\mathcal{L} = r^2\dot{\theta}$ eliminieren. Dies können Sie tun, indem Sie Gln. (4) benutzen. Leiten die damit eine lineare, gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für u her.

Was besagt die zweite Gleichung?

b) Zeigen Sie, dass

$$u = \frac{\mu}{\mathcal{L}^2}[1 + e\cos(\theta - \omega)] \tag{13}$$

diese Differentialgleichung für u löst; e und ω sind die zwei Integrationskonstanten. Wie lautet also die Lösung für $r(t)$?

c) Die Gleichung, die Sie für $r(t)$ erhalten, beschreibt *Kegelschnitte*, wobei der Parameter e als Exzentrizität bezeichnet wird. Der uns interessierende Fall ist $0 < e < 1$; dann stellt $r(t)$ eine Ellipsenbahn dar, deren große Halbachse a und kleine Halbachse b gegeben sind durch

$$\mathcal{L}^2/\mu = a(1-e^2), \qquad b^2 = a^2(1-e^2). \tag{14}$$

Leiten Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) eine Relation zwischen der Umlaufzeit T für eine komplette Ellipsenbahn und deren großer Halbachse her.

$\vec{r}(t)$ bezeichnet den Relativvektor zweier Teilchen im gegenseitigen Gravitationspotential, also zum Beispiel die Bewegung von Erde und Sonne, und μ ist die relative Masse. Sie haben in dieser Aufgabe die drei Keplerschen Gesetze bewiesen!

Aufgabe 8.4 *Integration der Gaußkurve*

a) Berechnen Sie mit Hilfe einer Transformation auf Polarkoordinaten das Volumen unter einer zweidimensionalen Gaußkurve,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(x^2+y^2)\right] dxdy. \tag{21}$$

Das infinitesimale Volumenelement transformiert sich gemäß $dxdy = rdrd\varphi$.

Wie lauten dann die Ergebnisse für

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-x^2\right] dx \quad \text{und} \quad \int_{0}^{\infty} \exp\left[-x^2\right] dx\ ? \tag{22}$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ax^2 - bx - c\right] dx. \tag{23}$$

Aufgabe 8.5 *Flächenintegration 2*

Berechnen Sie jeweils das Flächenintegral über das Gebiet G,

$$\iint_G f(x,y)dxdy. \tag{24}$$

a) $f(x,y) = xy$, mit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, mit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \sin x\}$
c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 1)}$, mit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

Aufgabe 8.6 *Disco-Strahler*

Stellen Sie sich einen Disco-Strahler vor, der folgende Eigenschaften hat:

- rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω_h in der horizontalen Ebene;
- oszilliert harmonisch mit Winkelgeschwindigkeit ω_p (cosinus) im Polarwinkel zwischen $\pi/6$ und $5\pi/6$;
- der radiale Abstand oszilliert harmonisch mit Winkelgeschwindigkeit ω_p zwischen L und $2L$.

a) Wie lauten Bahnkurve und Geschwindigkeit in Kugelkoordinaten? (Die Einheitsvektoren brauchen nicht explizit ausnotiert zu werden.)
b) Wie ist die kinetische Energie eines Strahlers der Masse m, der solch eine Bahnkurve vollführt?
c) Geben Sie Zeitpunkte an, an denen die φ-Komponente der Beschleunigung verschwindet.

Aufgabe 8.7 *Volumenintegration*

Berechnen Sie das Volumen einer Pyramide (4-seitig) mit Kantenlänge K und Höhe H.

Abgabe: Dienstag, 18.12.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).