WiSe 2007/08 23.11.2007

Prof. Dr. T. Franosch
Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig
Maximilians
Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 6

Tutoriumsaufgabe 6.1 *Vektoranalysis I*

a) Diskutieren Sie, ob die folgenden Operatoren auf Skalare oder Vektoren wirken und was das Ergebnis ist: div, rot, grad, $\nabla^2 \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}$

b) Schreiben Sie die oben gegebenen Operatoren komponentenweise in kartesischen Koordinaten.

c) Zeigen Sie explizit, dass für eine Funktion, die rotationssymmetrisch ist, $\varphi(\vec{r}) = \varphi(r)$ mit $r = |\vec{r}|$, folgendes gilt:

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}, \tag{1}$$

$$\nabla^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi''(r) + \frac{2}{r}\varphi'(r). \tag{2}$$

d) Berechnen Sie $\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ und $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ für das Potential $\varphi(\vec{r}) = -\vec{E}\cdot\vec{r}$ mit $\vec{E} = \text{const}$.

Tutoriumsaufgabe 6.2 *Differentialoperatoren der Vektoranalysis: nützliche Identitäten*

Überprüfen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\varphi(\vec{r})$ skalare und $\vec{E}(\vec{r})$ vektorielle Funktionen sind.

a) $\operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E}$

b) $\operatorname{div}\left(\varphi\,\vec{E}\right) = \varphi\ \operatorname{div}\vec{E} + \vec{E}\cdot\ \operatorname{grad}\ \varphi$

Tutoriumsaufgabe 6.3 *Konservatives Kraftfeld*

Für konservative Kraftfelder ist das Arbeitsintegral $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ wegunabhängig. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für lokal konservative Kraftfelder ist $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$. Überprüfen Sie, dass die Gravitationskraft

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}, \qquad r = \sqrt{\vec{r}^{\,2}}, \tag{3}$$

konservativ ist. Berechnen Sie die Arbeit um eine Masse m von Punkt $\vec{a} = (1,0,0)$ zum Punkt $\vec{b} = (1,2,2)$ zu bringen, einmal entlang des Pfades $a \to c \to b$ und einmal entlang des Pfades $a \to d \to b$, wobei $c = (1, 0, 2)$ und $d = (1, 2, 0)$ sind. Benutzen Sie den Fundamentalsatz der Integralrechnung, um das Ergebnis zu prüfen.

Aufgabe 6.4 *Vektoranalysis II: Potentiale*

Berechnen Sie die folgenden Felder

a) elektrisches Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ eines Dipols, wo $\vec{p}$ ein konstantes Dipolmoment ist:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

b) Gravitationsfeld einer homogenen Kugel, $\vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(r)$, mit

$$\Phi(r) = GMm \begin{cases} -\frac{1}{r} & r \geq R \\ \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{1}{R} & r < R \end{cases}$$

Aufgabe 6.5 *Differentialoperatoren der Vektoranalysis: Produktformeln*

Überprüfen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\varphi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ skalare und $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ vektorielle Funktionen sind.

a) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi\psi$

b) $\operatorname{div}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot}\ \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot}\ \vec{B}$

c) $\operatorname{rot}\left(\varphi\, \vec{B}\right) = \varphi\ \operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B} \times \operatorname{grad}\ \varphi$

d) * $\operatorname{rot}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E} - \left(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{E}\ \operatorname{div}\vec{B} - \vec{B}\ \operatorname{div}\vec{E}$

Aufgabe 6.6 *Nichtkonservatives Kraftfeld*

Sei das Wirbelfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$, mit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, gegeben. Ist die Kraft konservativ? Berechnen Sie explizit ihre Rotation. Berechnen Sie die Arbeit $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, die man aufwenden muss, um einen kompletten Kreis zu schließen auf einem Weg mit und gegen den Strom: $\vec{r}(t) = (x_0 + R\cos\Omega t, y_0 + R\sin\Omega t, 0)$ beziehungsweise $\vec{r}(t) = (x_0 + R\cos\Omega t, y_0 - R\sin\Omega t, 0)$.

Ergänzungssaufgabe 6.7 *Wiederholung: Trägheitsmoment*

Das Trägheitsmoment eines Teilchensystems um einen Punkt lautet $I_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha(x_\alpha^2\delta_{ij} - x_{\alpha i}x_{\alpha j})$, wo α für die N−Teilchen steht und $i, j = x, y, z$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment um den Bezugssystemsursprung für ein System von zwei Teilchen mit Massen $m_1 = m$ bei $\vec{x}_1 = (1, 1, 0)$ und $m_2 = 2m$ bei $\vec{x}_2 = (0, 1, 1)$. Eine Drehung um die z-Achse von 45° wird von der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos\pi/4 & \sin\pi/4 & 0 \\ -\sin\pi/4 & \cos\pi/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} a \qquad (4)$$

darstellt. Berechnen Sie das neue Trägheitsmoment nach der Drehung: $I' = D^T I D$.

Abgabe: Dienstag, 4.12.2007, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).