WiSe 2007/08 11.1.2008

Prof. Dr. T. Franosch
Marta Balbás Gambra/Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
`www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey`

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

Übungsblatt 11

Tutoriumsaufgabe 11.1 *Reihenentwicklung*

Entwicklen Sie die folgenden Funktionen unter Verwendung bekannter Reihenentwicklungen[1]

a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$,

b) $g(x) = \frac{e^{x^2}}{\cos(x)}$, bis $O(x^5)$.

Beachten Sie bei (a) die Beziehung zwischen $f(x)$ und $\frac{1}{1-x}$.

Tutoriumsaufgabe 11.2 *Auflösung einer Gleichung*

Gegeben sei die Gleichung

$$m = \tanh\left(h + \frac{Jz}{k_B T} m\right), \tag{5}$$

wobei J, z, k_B positive Konstanten und T sowie h Parameter sind. m ist die Variable.

a) Nehmen Sie das Argument des tanh als Variable $x = h + \frac{Jz}{k_B T} m$ und skizzieren Sie graphische Lösungen der Gleichung für $h = 0$, $h > 0$ und $h < 0$. Diskutieren Sie für den Fall $h = 0$ die qualitativ verschiedenen auftretenden Fälle als Funktion des Parameters T.

---

[1] Reihenentwicklungen, die für die Klausur auswendig bekannt sein müssen:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{1}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{geometrische Reihe.} \tag{4}$$

b) Führen Sie die asymptotische Entwicklung von $\tanh x$ bis zur 3. Ordnung durch. Finden Sie die Lösungen für x im Falle $h = 0$. Für welche Werte des Parameters T gibt es eine reelle Lösung? Skizzieren Sie die Lösungen x als Funktion des Parameters T.

c) Finden Sie eine Lösung der Gleichung für den Fall $h \neq 0$ und $T \neq T_c$, wobei $T_c = \frac{Jz}{k_B}$. Verwenden Sie dafür die asymptotische Entwicklung für $\tanh x$ bis zur 1. Ordnung. Nun benutzen Sie auch die 3. Ordnung, um eine Lösung für den Fall $T = T_c$ zu finden.

Aufgabe 11.3 *Van der Waals–Gas*

Gegeben sei die van der Waals–Gleichung

$$P(n,T) = \frac{nk_BT}{1-nb} - an^2, \tag{6}$$

wobei n und T Variablen sind und a und k_B positive Konstanten.

a) Bestimmen Sie den kritischen Punkt:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0. \tag{7}$$

Lösen Sie dann $T = T_s(n)$.

b) Setzen Sie nun das Ergebnis in P ein, so dass P als Funktion nur von n, $P_s = P_s(n)$, ausgedrückt werden kann. Finden Sie jetzt n_c, so dass

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_s(n)}{\mathrm{d}n}\right|_{n=n_c} = 0. \tag{8}$$

Setzen Sie dann diesen Wert n_c in $T_s(n)$ und dann in $P_s(T_s(n))$, um T_c und P_c zu finden.
Zur Kontrolle: Die Ergebnisse sollten sein: $n_c = 1/3b$, $k_BT_c = 8a/27b$ *und* $P_c = a/27b^2$.

c) Wir definieren nun neue Variablen:

$$\Pi = \frac{P - P_c}{P_c} \tag{9}$$

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{10}$$

$$\Psi = \frac{n - n_c}{n_c}. \tag{11}$$

Schreiben Sie die Van der Waals–Gleichung (6) als Funktion von Π, t, Ψ und P_c, T_c, n_c um. Entwicklen Sie die Gleichung in Potenzen von t und Ψ in der Nähe von $t = 0$ und $\Psi = 0$, bis $O(\Psi^4)$ und $O(t\Psi^2)$. Zeigen Sie, dass in führender nichtrivialer Ordnung

$$\Pi = 4t + 6t\Psi + \frac{3}{2}\Psi^3 + O(\Psi^4, t\Psi^2). \tag{12}$$

Aufgabe 11.4 *Taylorentwicklung*

Formulieren Sie die Taylorreihe der Funktion $E(p) = \sqrt{c^2p^2 + (mc^2)^2}$ bis zur 4. Ordnung in Potenzen von p, wobei c und m Konstanten sind.

Aufgabe 11.5 *Asymptotische Entwicklung*

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung um $x_0 = 0$ bis zum angegebenen Summanden der folgenden Funktionen durch Erseztzung bekannter Reihen.

a) $f(x) = \sin(x)\exp(x) \quad \text{bis} \quad O(x^7)$,

b) $g(x) = \frac{\exp(x)}{1+\cos(2x)}$ bis $O(x^5)$.

Aufgabe 11.6 *Taylorreihen*

Berechnen Sie die drei ersten Glieder der Taylorentwicklung von

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} \log(1+x)}{\sqrt{1-x}}. \tag{13}$$

Benutzen Sie dann ein Computeralgebra-Programm, um das Ergebnis zu überprüfen.
Hinweis: Der Befehl für Mathematica heisst: `Series[f[x],` $\{x, x_0, n\}$`]`, *um die Funktion $f(x)$ in der Variable x in der Nähe von x_0 bis zur Ordnung n zu entwicklen.*

Ergänzungssaufgabe 11.7 *Stokesscher Satz 3*

Das Vektorpotenzial $\vec{A}$ eines magnetischen Dipols und dessen Magnetfeld $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ lauten

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^5}, \tag{14}$$

mit einer Konstanten μ_0. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um den Satz von Stokes zu bestätigen. Das konstante Dipolmoment $\vec{m}$ sei dazu in z-Richtung orientiert, $\vec{m} = m\hat{e}_z$. Führen Sie einerseits das Flächenintegral über eine Halbkugel aus, deren Grundfläche in der xy-Ebene liege und deren Rundung zur positiven z-Achse orientiert sei. Der Radius der Halbkugel sei a. Berechnen Sie anderseits explizit das Linienintegral über den Rand der Grundfläche.

Abgabe: Dienstag, 22.01.2008, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).