Arnold-Sommerfeld-Zentrum
Departement für Physik
Ludwig-Maximilian-Universität München 07. 12. 2005

TL IV: Thermodynamik für Lehramt im WS 2005/2006

Prof. Dr. Th. Franosch

Übungsblatt 8

Übung 1: Legendre Transformation

Berechnen Sie die freie Energiedichte $f = e - Ts$ (e, s: Energie-bzw. Entropiedichte) für einen Spin-1/2 Paramagneten als Legendre-Transformierte der Energiedichte $e(s)$. Hierbei lautet die Entropiedichte im mikrokanonischen Ensemble

$$s(e) = -k_B \frac{1-e/H}{2} \ln \frac{1-e/H}{2} - k_B \frac{1+e/H}{2} \ln \frac{1+e/H}{2} \quad . \tag{1}$$

Die Temperatur ist durch $1/T = (\partial s/\partial e)$ gegeben. Eliminieren Sie e und s in der freien Energiedichte und stellen Sie f in Abhängigkeit der Temperatur dar.

Übung 2: noch einmal Gummifaden

Bei einem Gummifaden wird folgender Zusammenhang zwischen der Länge l, der Zugkraft Z und der Temperatur T festgestellt:

$$l = l_0 + \frac{\alpha Z}{T} \tag{2}$$

($l_0,\ \alpha$: Konstante)
(Die Zugkraft $Z = mg$ werde durch ein angehängtes Gewicht der Masse m realisiert).

Ferner ergibt das Experiment, daß man zum Erwärmen des Fadens um $1K$ bei festgehaltener Länge $l = l_0$, unabhängig von der Ausgangstemperatur, die konstante Wärmemenge $c > 0$ benötigt.

a) Zeigen Sie, daß die Wärmekapazität C_l des Fadens bei konstanter Lämge l weder von T noch von l abhängt.

b) Berechnen Sie die innere Energie $E(T,l)$ und die Entropie $S(T,l)$. Wie lauten die Adiabatengleichungen $T = T(l)$ und $Z = Z(l)$?

c) Skizzieren Sie die Isothermen und Adiabaten in einem $Z - l$-Diagramm.

d) Skizzieren Sie im $Z - l$-Diagramm einen Carnot'schen Kreisprozess. In welcher Richtung muß er durchlaufen werden, damit er als Wärmekraftmaschine wirkt?

e) Die beiden bei dem Carnot-Prozess durchlaufenen Isothermenstücke mögen zu den Temperaturen T_1 und $T_2 < T_1$ gehören, und Q_1 bzw. Q_2 seien die auf diesen Isothermen vom Faden aufgenommenen Wärmemengen. Berechnen Sie explizit Q_1, Q_2 und damit den Wirkungsgrad $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ des Carnot-Prozesses.
Benutzen Sie dazu den 1. Hauptsatz, die Zustandsgleichungen $E = E(T,l)$ und $Z = Z(T,l)$ des Fadens sowie - zur Elimination der Fadenlängen - die Adiabatengleichungen $T = T(l)$ oder die Beziehung $S = S(T,l)$.

f) Berechnen Sie die Wärmekapazität C_Z des Fadens bei konstanter Belastung Z.

g) Bei konstanter Belastung Z verkürzt sich der Faden, wenn er von T_1 auf $T_2 > T_1$ erwärmt wird. Welcher Bruchteil β der zugeführten Wärme wird dabei durch Heben des Gewichts in mechanische Arbeit umgewandelt? Warum ist $\beta < 1$?

h) Der Faden werde wärmeisoliert von l_1 auf $l_2 > l_1$ gedehnt. Wird er dabei wärnmer oder kälter? Berechnen Sie die Temperaturänderung.

i) Der zunächst mit Z belastete Faden der Temperatur T werde plötzlich entlastet (Z=0). Die anschliessende Kontraktion des Fadens erfolge so schnell, daß dabei kein Wärmeaustausch mit der Umgebung möglich ist. Berechnen Sie die Entropiezunahme ΔS bei diesem irreversiblen Prozess als Funktion von Z und T. Wie kann man den glerichen Endzustand durch einen reversiblen Prozess erreichen und ΔS durch Integration von $\frac{\delta Q}{T}$ berechnen?

Hinweise:

- Benutzen Sie den 1. Hauptsatz $dU = \delta Q_{rev} + \delta W_{rev}$, mit $\delta Q_{rev} = TdS$ und $\delta W_{rev} = Zdl$.
- Es besteht die Analogie $l \leftrightarrow V, Z \leftrightarrow -p$ zu Gasen.
- Begründen und benutzen Sie die Maxwell-Relation $\frac{\partial S}{\partial l} = -\frac{\partial Z}{\partial T}$.