9. Beugung (Skalare Theorie)

- Abweichung der Lichtausbreitung vom Strahlengang der geometrischen Optik
z. B. Licht kann in den geometrischen Schatten eindringen ("um die Ecke biegen").

<u>Mathematische Problemstellung</u>

löse die Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zu vorgegebenen Randbedingungen an den Oberflächen des Objekts, das die Beugung verursacht. Dieses Problem kann nur in wenigen Fällen exakt gelöst werden *).

Hier betrachten wir daher nur die <u>skalare Beugungstheorie</u>. Solange man sich nicht für Polarisationseffekte interessiert ist diese Näherung auch gerechtfertigt, da jede kartesische Komponente der Vektorfelder die Wellengleichung erfüllt. Weiter vernachlässigt man damit auch Effekte, die mit den nicht strahlenden Feldern nahe der Oberfläche des beugenden Objekts liegen.

---

*) A. Sommerfeld, Bd IV Optik, Harri Deutsch Verlag, § 38.

Die skalare Beugungstheorie ist dann eine gute Näherung, wenn der Beobachtungspunkt einige Wellenlängen vom beugenden Objekt entfernt ist, und unter sog. paraxialen Bedingungen, unter denen Polarisationseffekte minimal sind. Die Theorie der skalaren Beugung gilt streng für akustische (Druck) Wellen in einem homogenen Medium.

Annahme: Alle Information, die für die Berechnung der Intensität elm. Strahlung an einem bestimmten Raumpunkt notwendig ist, ist in einer skalaren Wellenfunktion $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ enthalten. $\underline{\psi}(\vec{r},t)$ spezifiziert die Amplitude und Phase der Welle. Falls man monochromatisches Licht vorliegen hat, so gilt

$$\boxed{\underline{\psi}(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\, e^{-i\omega t}}$$

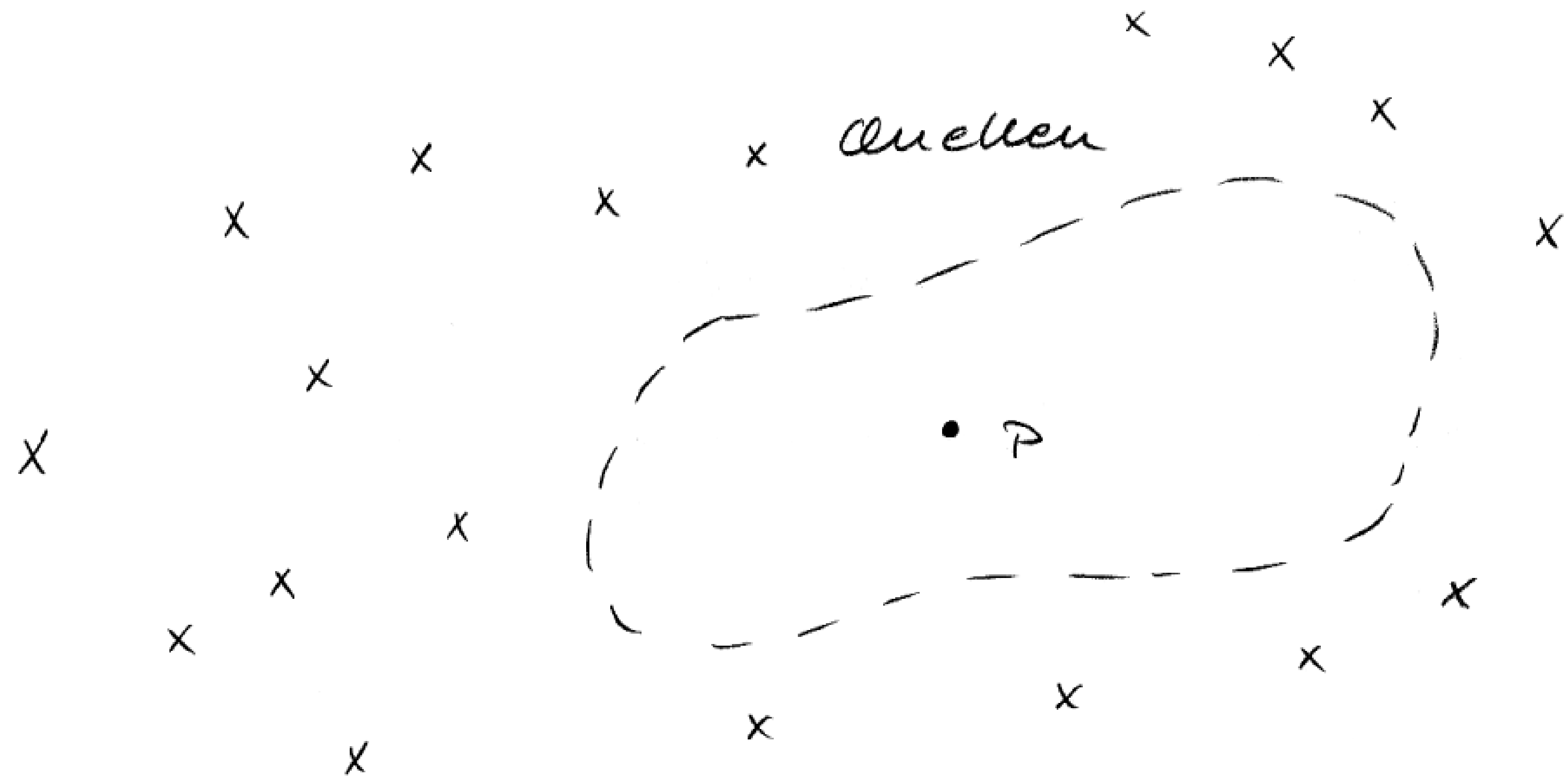
$$\text{Intensität} \sim |\psi(\vec{r})|^2$$

Die Wellengleichung reduziert sich dann auf die Helmholtzgleichung

$$\boxed{(\Delta + k^2)\,\psi = 0}$$

mit $k = \frac{\omega}{c}$.

9.1. Das Helmholtz-Kirchhoff Integral



Um die Amplitude $\psi(P)$ der elem. Welle an einem Punkt P zu berechnen, das von einer Zahl von Quellen herrührt, ist es ausreichend die Amplituden und Phasen der von diesen Quellen ausgehenden elem. Wellen zu kennen. Das Feld am Punkt P ergibt sich aus einer Summe über diese Beiträge (linear Superposition).

Alternativ kann man das Feld auch aus einer Spezifikation der gesamten Wellenfunktion auf einer Oberfläche gewinnen, welche den Punkt P einschließt, aber keine Ladungen (siehe die gestrichelte Kurve in obiger Abbildung). Dieser Ansatz ist für die Berechnung von Beugungseffekten aufgrund von opaquen Schirmen mit Öffnungen besser geeignet.

$\psi(\vec{r})$ genügt der Helmholtz Gleichung

$$\boxed{(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{r}) = 0 \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

Betrachte nun eine weitere Funktion $\chi(\vec{r})$, der wir noch keine physikalische Bedeutung zuweisen, die auch der Helmholtz Gleichung genügt

$$(\Delta + k^2)\,\chi(\vec{r}) = 0$$

Nach dem 2. Greenschen Satz gilt

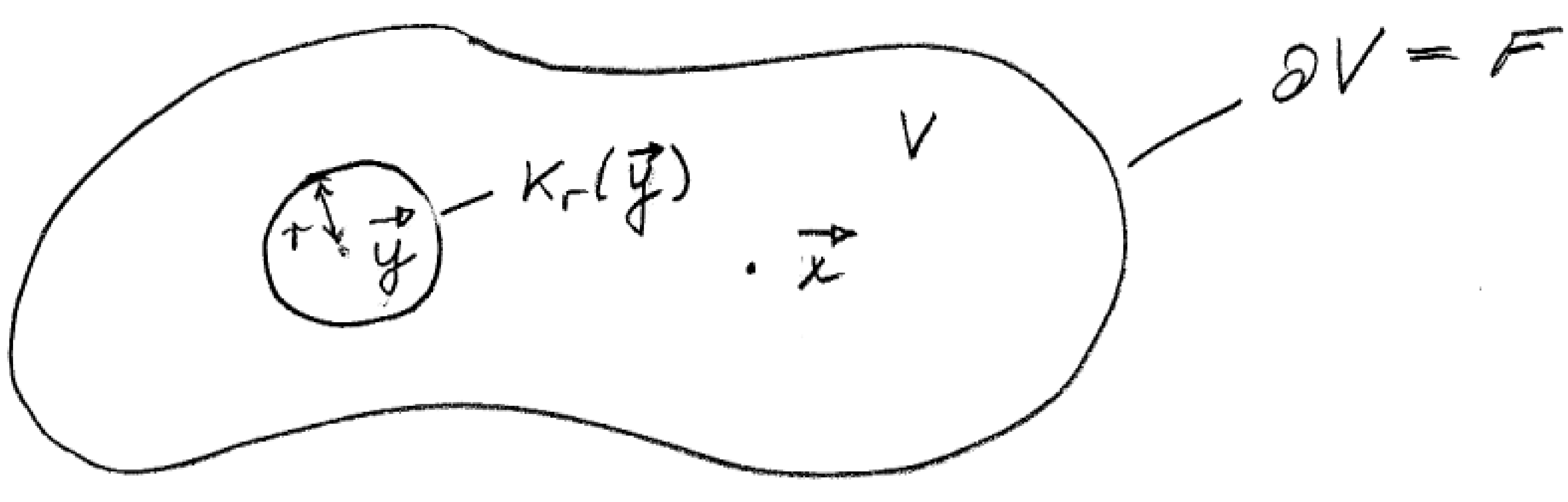
$$\int_V (\psi \Delta \chi - \chi \Delta \psi)\, dV = \int_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) df$$

für ein Gebiet V mit Rand ∂V.

Wir setzen nun χ gleich der Greenschen Funktion für die Helmholtz gleichung

$$\chi = G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\exp(ik|\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

und sparen bei $\vec{y} \in V$ eine kleine Kugel aus (→ Skizze), die den Radius r hat.



Dann verschwindet die linke Seite der 2. Greenschen Identität identisch.

Auf dieser Kugel $K_r(\vec{y})$ gilt:

$$- \frac{\partial \chi}{\partial n} = \frac{\partial \chi}{\partial r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr}$$

(Beachte, daß die Normale $\vec{n}$ auf dem Rand von V in $K_r(\vec{y})$ hinein zeigt $\curvearrowright \frac{\partial}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial r}$)

Da weiter $df = r^2 d\Omega$ folgt im Limes $r \to 0$

$$\int_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) df =$$

$$= - \int r^2 d\Omega \left[\psi \left(\frac{1}{r^2} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{ik}{r}} \right) e^{ikr} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\frac{e^{ikr}}{r}} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]$$

$$\xrightarrow{(r \to 0)} -4\pi \psi(\vec{y}) .$$

~~In einem konkreten Beugungsproblem wird~~ ein Teil von ∂V im Unendlichen liegen. Wir verlangen, daß die Lösung ψ des Beugungsproblems nur asymptotisch auslaufende Wellen hat, d.h. $\psi \sim \frac{1}{r} e^{ikr}$ (und nicht $\frac{1}{r} e^{-ikr}$) asymptotisch für große r. Dann gilt

$$\left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) r^2 d\Omega \to 0 \quad \text{für } r \to \infty .$$

Deshalb muss man nur über die endlichen Teile der Oberfläche integrieren.

$$A \quad \underset{= P}{\psi(\vec{y})} = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[G(\vec{x},\vec{y})\,\vec{\nabla}\psi(\vec{x}) - \psi(\vec{x})\,\vec{\nabla}G(\vec{x},\vec{y})\right]\vec{n}\cdot df$$

$\equiv$ Helmholtz - Kirchhoff - Integral

$\vec{y} = P$; $\vec{x}$ liegt auf F

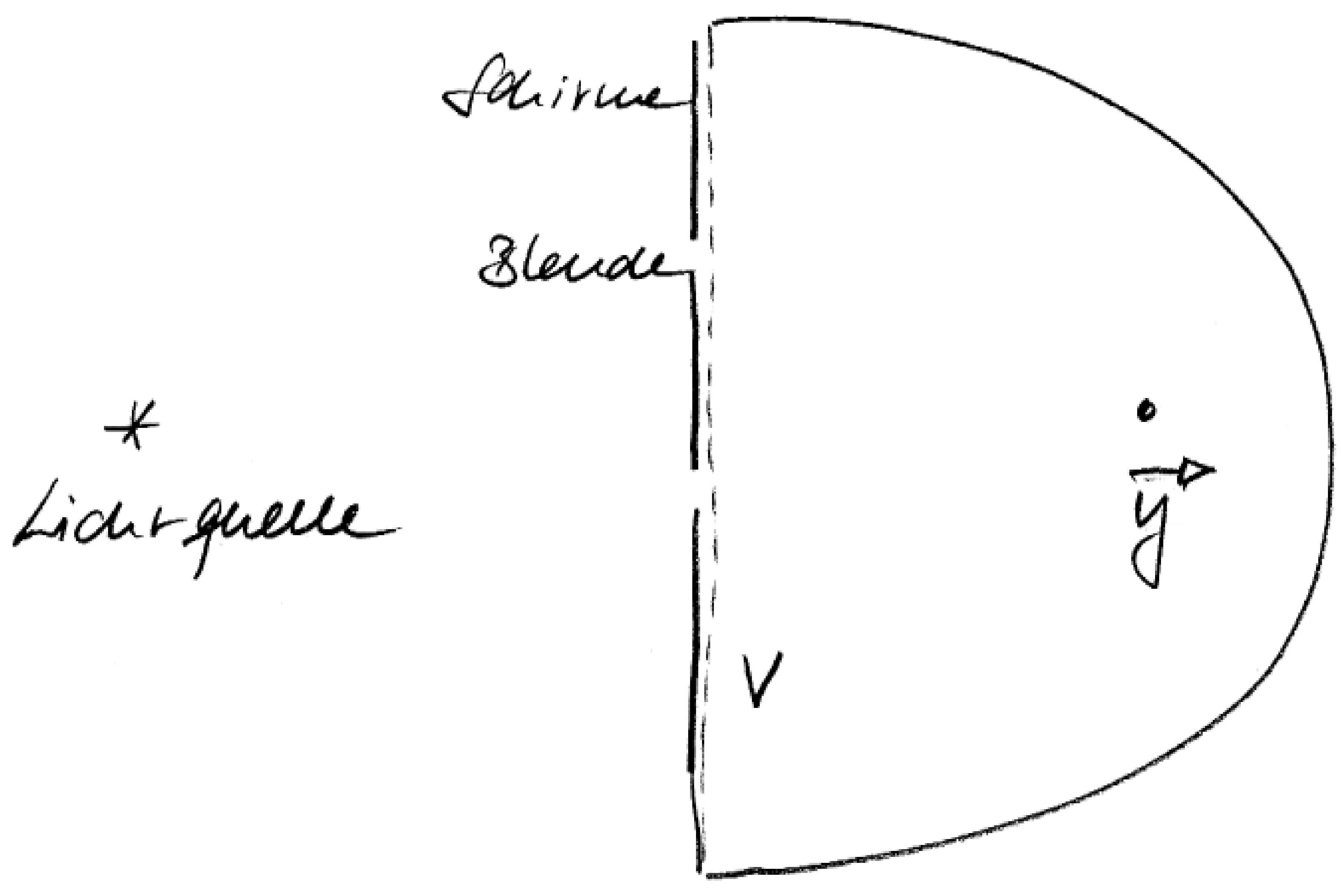
Diese exakte Relation drückt die gesuchte Funktion $\psi(\vec{y})$ durch die Randwerte von ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ aus, und stellt natürlich keine Lösung des Problems dar, sondern ist wie schon bei den elektrostat. Randwertproblemen eine Integralgleichung!

9.2. Die Kirchhoff'sche Näherung

Das Beugungsproblem besteht darin, daß man die Auswirkungen von (undurchsichtigen) Schirmen und Blenden auf die Lichtausbreitung bestimmen möchte. Der ganze Raum ausserhalb des Materials der Schirme ist von der Lichterregung ψ erfüllt zu denken, die der Helmholtzgleichung genügt und in den Lichtquellen gewisse Singularitäten aufweist. Die Art dieser Singularitäten ist zunächst keineswegs bekannt, ebensowenig aber auch der genaue Einfluß der Schirme, d.h. die Grenzbedingungen, denen die Funktion ψ an der

Oberfläche der Schirme zu genügen hat.
Es zeigt sich allerdings, daß die Beugungserscheinungen sehr unempfindlich auf die physikal. Beschaffenheit der Schirme sind. Wäre beides bekannt, so hätte man ein Randwertproblem für die Wellengleichung mit vorgegebenen Singularitäten gegeben.

Kirchhoff ging von der Tatsache aus, daß bei grober Beobachtung das Licht sich von der Quelle bis zu den Schirmen ungestört ausbreitet und erst hinter engen Blenden ein Einfluss der Schirmwände bemerkbar ist.



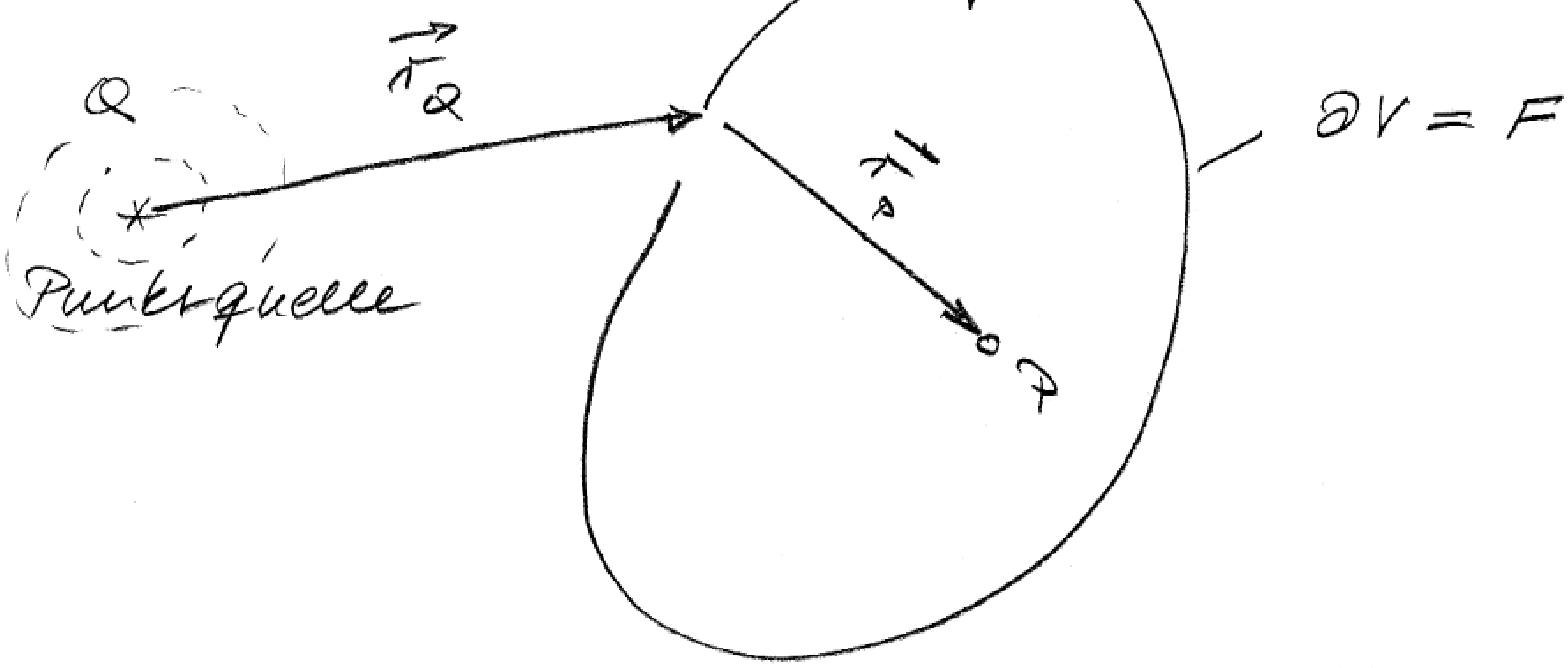
- $\psi, \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = 0$ in 1. Nhrg auf Rückseite der Schirme
- Für Teile der Fläche ∂V, die Blenden überspannen, nehme als Randwerte die Werte der ungestörten Lichtausbreitung
$\psi = \psi^0, \quad \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = \dfrac{\partial\psi^0}{\partial n}$ Blende

Vertauscht man Schirme und Öffnungen (komplementäre Anordnung), so erfüllen die zugehörigen Lösungen ψ und $\bar{\psi}$ ($\bar{\ }$ = Lösung zu komplementärer Anordnung)

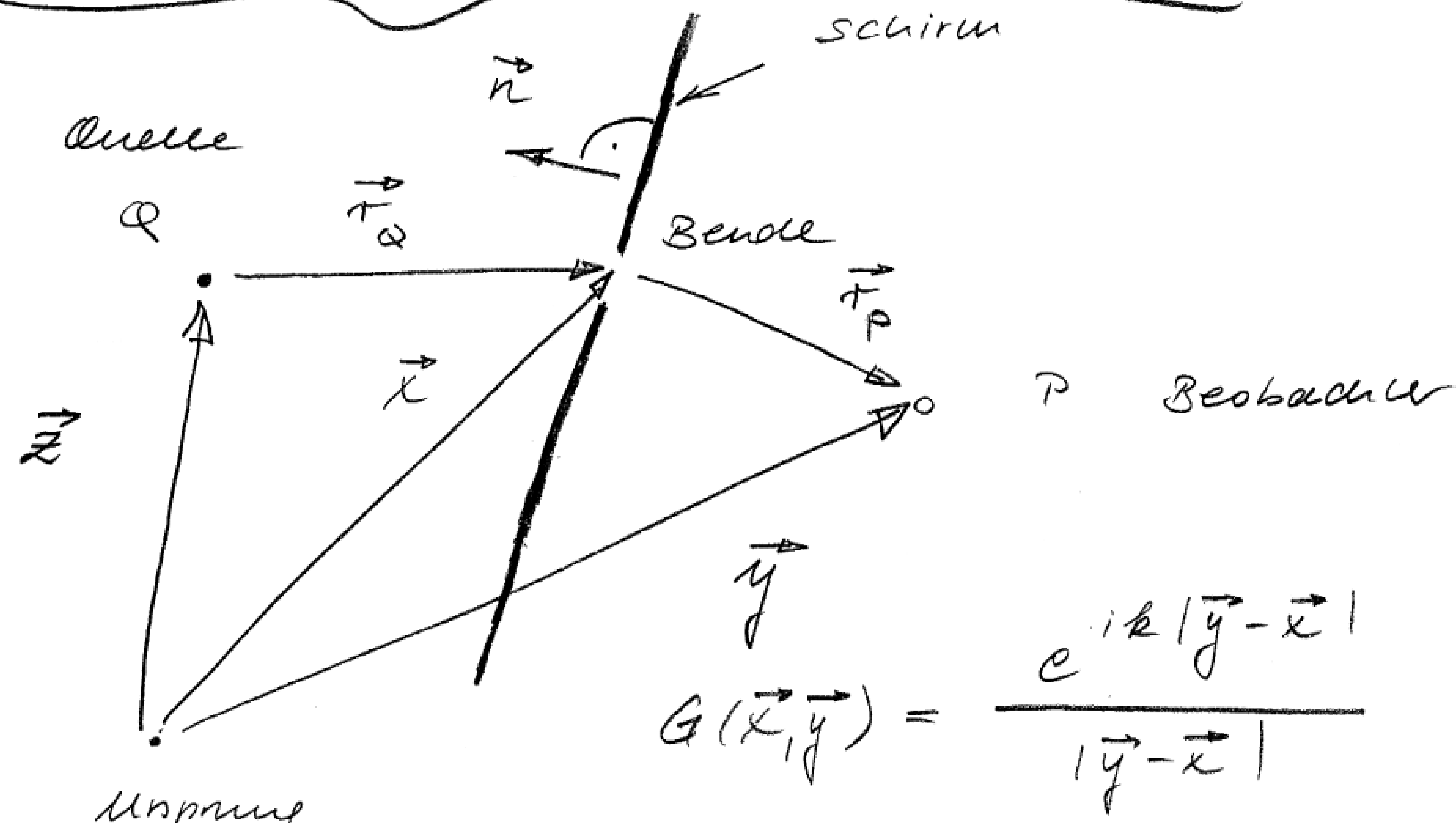
$$\psi + \bar{\psi} = \psi^0$$

= Babinetsches Prinzip.

Geometrie



$$\psi(\vec y) = \frac{1}{4\pi} \oint_F \left(G(\vec x,\vec y)\, \vec\nabla \psi(\vec x) - \psi(\vec x)\, \vec\nabla G(\vec x,\vec y) \right) d\vec f$$



$$G(\vec x,\vec y) = \frac{e^{ik|\vec y - \vec x|}}{|\vec y - \vec x|} = e^{ikr_P}/r_P$$

Kirchhoff'sche Annahmen

(1) $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ auf Rückseite der Schirme

(2) $\psi = \psi^\circ = A \exp(ik|\vec r_Q|)/r_Q$

$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial n}$

auf Blende

Mit den Kirchhoff'schen Näherungen reduziert sich die Integration in der Helmholtz-Kirchhoff'schen Integralgleichung auf eine Integration über die Blenden (Öffnungen), wobei außerdem ψ durch die vom Punkt Q ausgehende ungestörte Welle ersetzt wird.

$$\psi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}\int_B \left[G\,\nabla\psi^\circ - \psi^\circ\,\vec{\nabla}G\right]d\vec{f} \qquad (1)$$

Die Helmholtz-Kirchhoff Gleichung gilt auch für ψ°, d.h.

$$\psi^\circ(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left[G\,\nabla\psi^\circ - \psi^\circ\,\vec{\nabla}G\right]d\vec{f} \qquad (2)$$

Teile nun das Integral über F auf

$$\int_F = \int_S + \int_B \qquad \begin{array}{l} S = \text{Schirm} \\ B = \text{Blende} \end{array}$$

(1), (2)

$$\curvearrowright \psi(\vec{y}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{4\pi}\int_B \ldots = \frac{1}{4\pi}\left(\int_F \ldots - \int_S \ldots\right) =$$

$$\overset{(2)}{=} \psi^\circ(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi}\int_S \left[G\,\vec{\nabla}\psi^\circ - \psi^\circ\,\vec{\nabla}G\right]d\vec{f}$$

Eine äquivalente Form der Kirchhoff-Nhrg. lautet also

$$\psi(\vec{y}) = \psi^\circ(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi}\int_S \left[G\,\vec{\nabla}\psi^\circ - \psi^\circ\,\vec{\nabla}G\right]d\vec{f} \qquad (1)'$$

Mit den Kirchhoff Annahmen wird somit aus dem Helmholtz - Kirchhoff Integral

$$\psi(\vec{y}) = \frac{A}{4\pi} \int_{\text{Blenden}} \left(\frac{e^{ikr_P}}{r_P} \vec{\nabla} \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q} - \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q} \vec{\nabla} \frac{e^{ikr_P}}{r_P} \right) d\vec{f}$$

Für die Auswertung der Integrale wollen wir annehmen daß sowohl Quellpunkt Q als auch Beobachtungspunkt P einen Abstand zur Blende haben, der groß im Vergleich zur Wellenlänge λ ist.

$$r_P, r_Q \gg \lambda$$

*) $$\curvearrowright \quad \psi(\vec{y}) = ik \frac{A}{4\pi} \int_B \frac{e^{ik(r_P + r_Q)}}{r_P r_Q} (\hat{e}_Q - \hat{e}_P) \cdot \vec{n} \, df$$

Fresnel Kirchhoff'sches Beugungsintegral

$$\hat{e}_Q = \vec{r}_Q / r_Q \; ; \quad \hat{e}_P = \vec{r}_P / r_P \, .$$

---

*) Nebenrechnungen:

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_x \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_Q}{r_Q} \left(ik - \frac{1}{r_Q} \right) \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q}$$

$$\cong \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_Q}{r_Q} (ik) \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_Q = - r_Q \cos \Theta_Q$$

Θ_Q = Einfallswinkel zum Lot auf Blende
(Beachte Richtung des Normalenvektors)

Im Vergleich zu den schnell oszillierenden Exponentialfaktoren kann man den Winkelanteil $(\hat{e}_Q - \hat{e}_P)\cdot\vec{n} = -(\cos\theta_Q + \cos\theta_P)$ praktisch als konstant annehmen. Merkliche Beugung tritt nur in der Nähe der Schattengrenze auf.

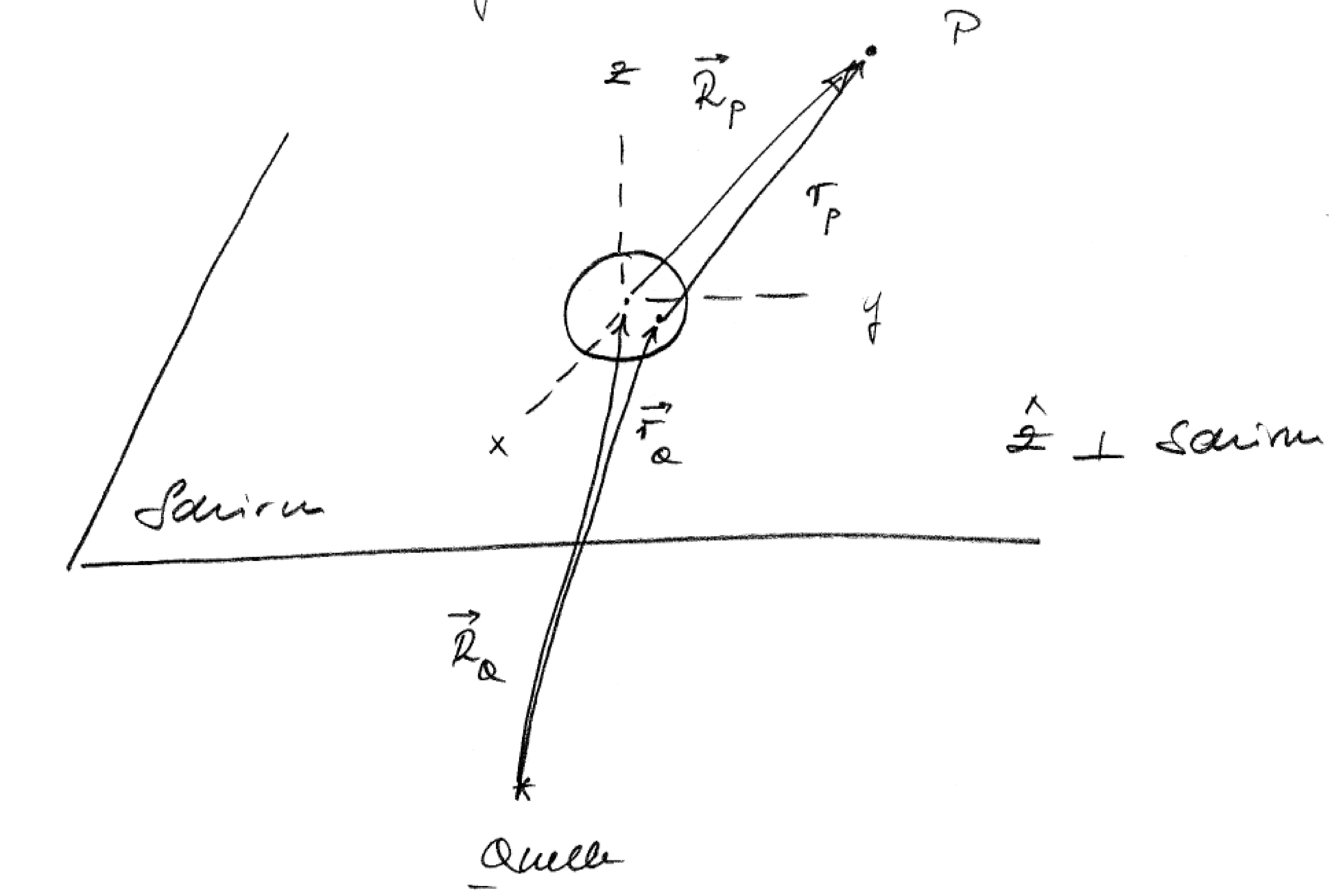
Im folgenden ersetzen wir $\frac{1}{2}(\cos\theta_Q + \cos\theta_P)$ durch einen mittleren Wert $\cos\delta$, und ebenso $\frac{1}{r_P r_Q}$ durch einen mittleren Wert $1/R_P R_Q$. Damit wird der Ausgangspunkt der Rechnungen

$$\psi(\vec{y}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos\delta \frac{1}{R_P R_Q} \int_B e^{ik(r_P + r_Q)} df$$

$\equiv$ Huygensches Prinzip: Von jedem Punkt der Öffnung geht eine Kugelwelle $\frac{1}{r_P} e^{ikr_P}$ aus. Ihre Stärke und insbesondere ihre Phase wird von einer einfallenden Kugelwelle $A\frac{1}{r_Q} e^{ikr_Q}$ bestimmt.

(Das Fresnel-Kirchhoff Integral liefert eine Begründung des Huygenschen Prinzips aus der Elektrodynamik)

Ebene Öffnung



(ξ, η) Variablen in Öffnung

$$r_P = r$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$$

$$r_Q = r'$$

$$(r')^2 = (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + z'^2$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Also
$$r^2 = R^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

$$r'^2 = R'^2 - 2(x'\xi + y'\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

Verwende $\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \pm \ldots$

$$r = R - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2R} - \frac{(x\xi+y\eta)^2}{2R^3} + \dots$$

$$r' = R' - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi+y'\eta)}{2R'^3} + \dots$$

Einsetzen ergibt dann

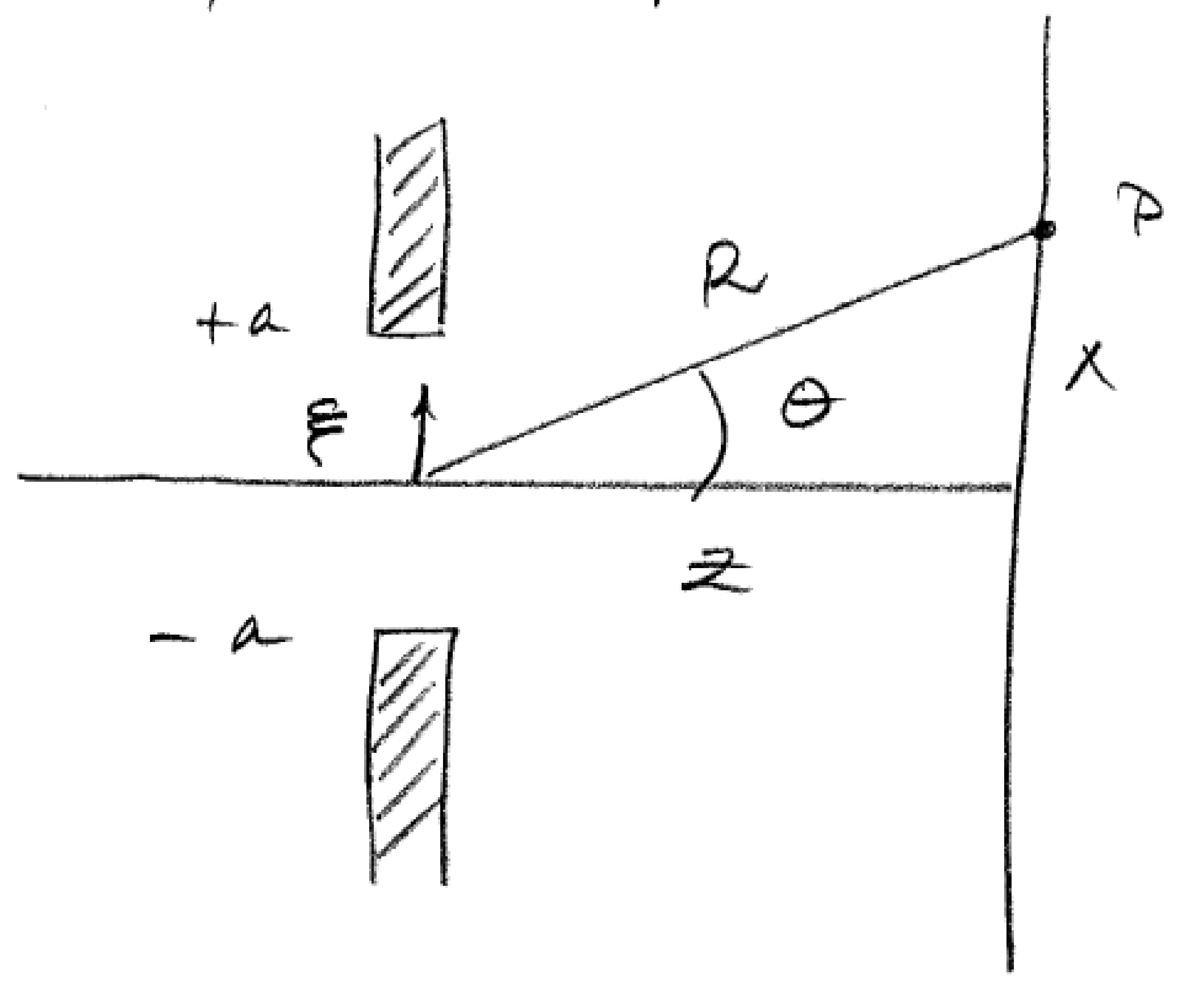
$$\psi(\vec{y}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos\delta \, \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} \int_B e^{ik\phi(\xi,\eta)} d\xi \, d\eta$$

wobei

$$\phi(\xi,\eta) = -\frac{x\xi+y\eta}{R} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2R} - \frac{(x\xi+y\eta)^2}{2R^3} - \frac{x'\xi+y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2+\eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi+y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots$$

Beispiele

(a) Einfacher Spalt



$$\alpha = \frac{x}{R}$$

$$\psi(\theta) \sim \int_{-a}^{+a} e^{-ik\alpha\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{i}{k\alpha} e^{-ik\alpha\xi} \Big|_{-a}^{+a}$$

$$= i \cdot \frac{1}{k\alpha} \left(e^{-ik\alpha a} - e^{ik\alpha a}\right)$$

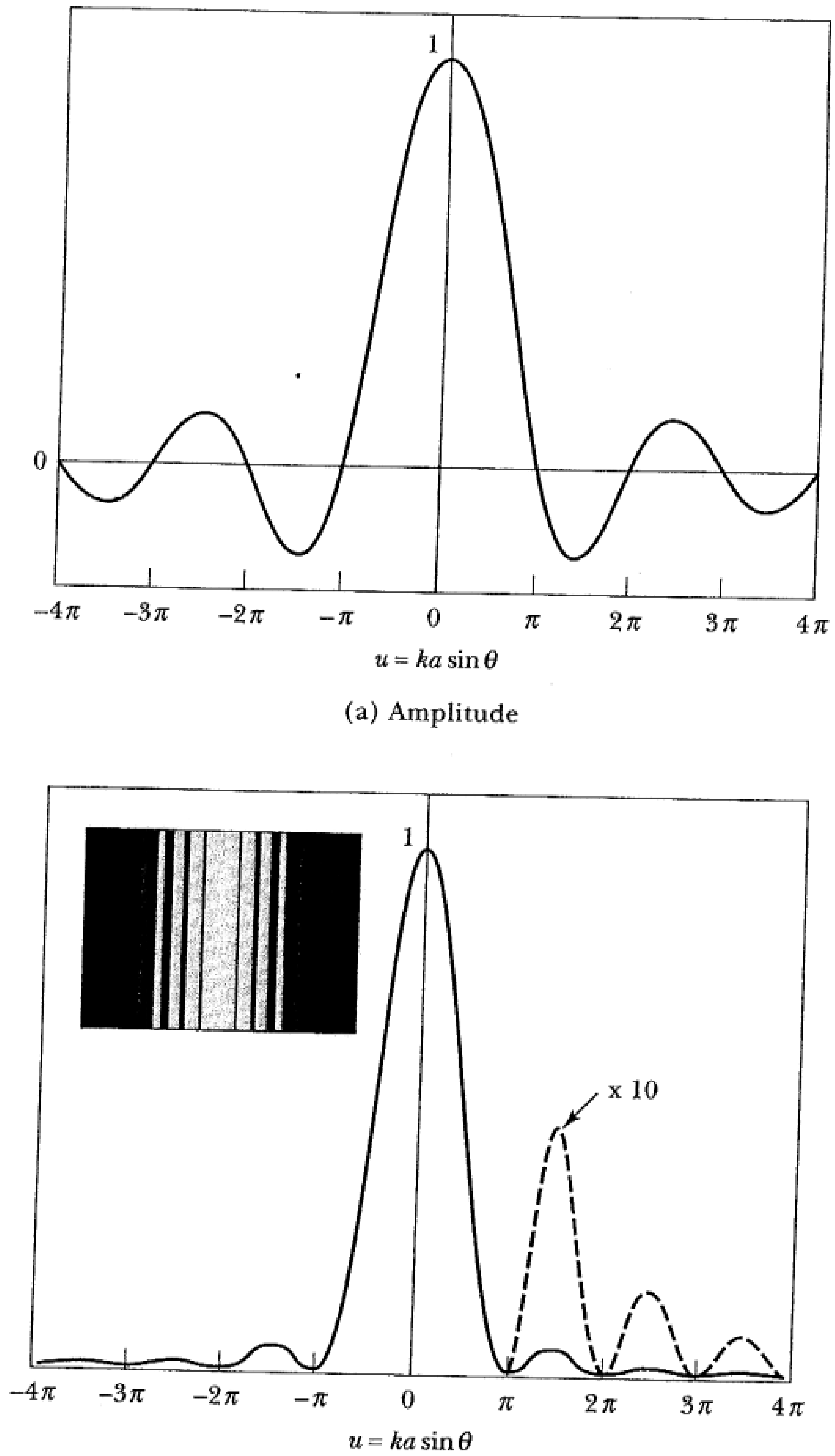
$$= 2a \frac{\sin u}{u} = 2a \operatorname{sinc} u$$

mit $u = k\alpha a = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta$

$$\approx \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{x}{z}$$

$$I(\theta) \sim |\psi(\theta)|^2$$

$$\sim (\operatorname{sinc} u)^2$$

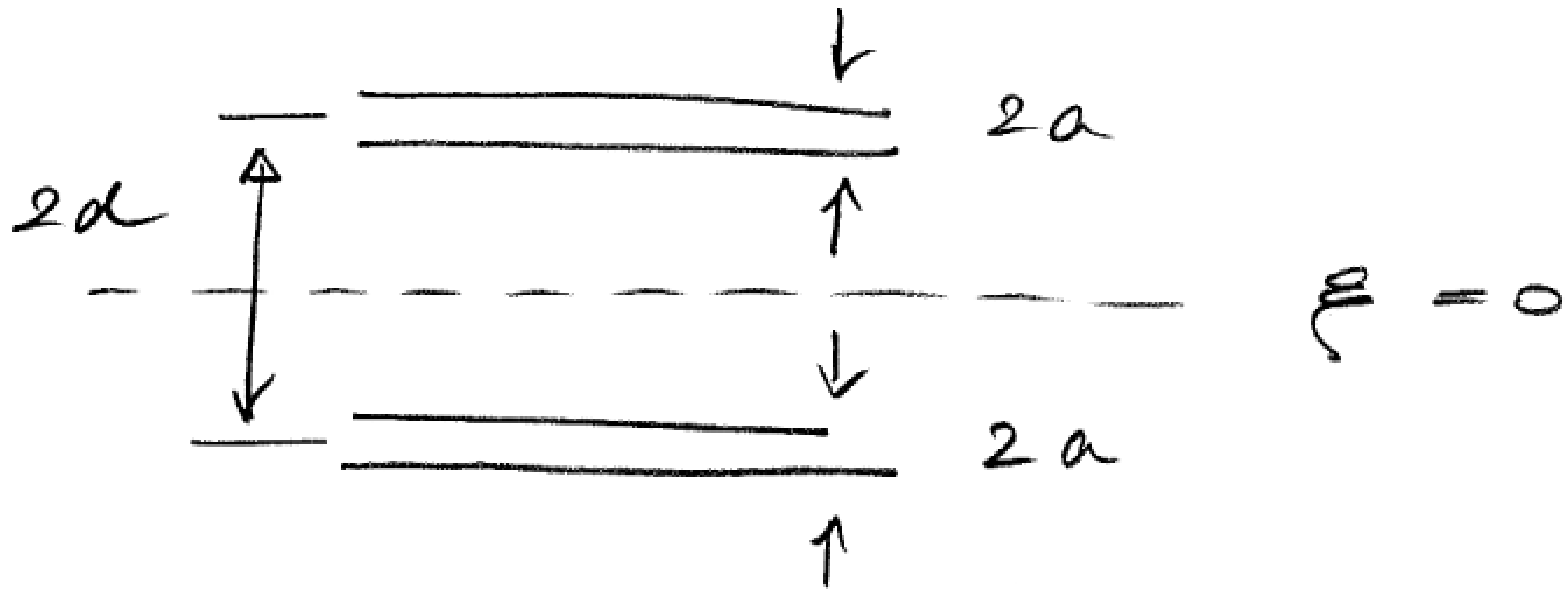


(b) Intensity

FIGURE 12-16. Amplitude and intensity of single-slit diffraction.

aus Heald & Marion
„Classical electromagnetic
radiation", Brooks / Cole

b) Doppelspalt



$$\psi \sim \int_{-d-a}^{-d+a} e^{-ik\alpha\xi}\, d\xi + \int_{d-a}^{d+a} e^{-ik\alpha\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{4}{k\alpha} \sin(k\alpha a) \cos(k\alpha d)$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cos^2 v$$

$$u = k\alpha a = ka \sin\theta$$
$$v = k\alpha d = kd \sin\theta$$

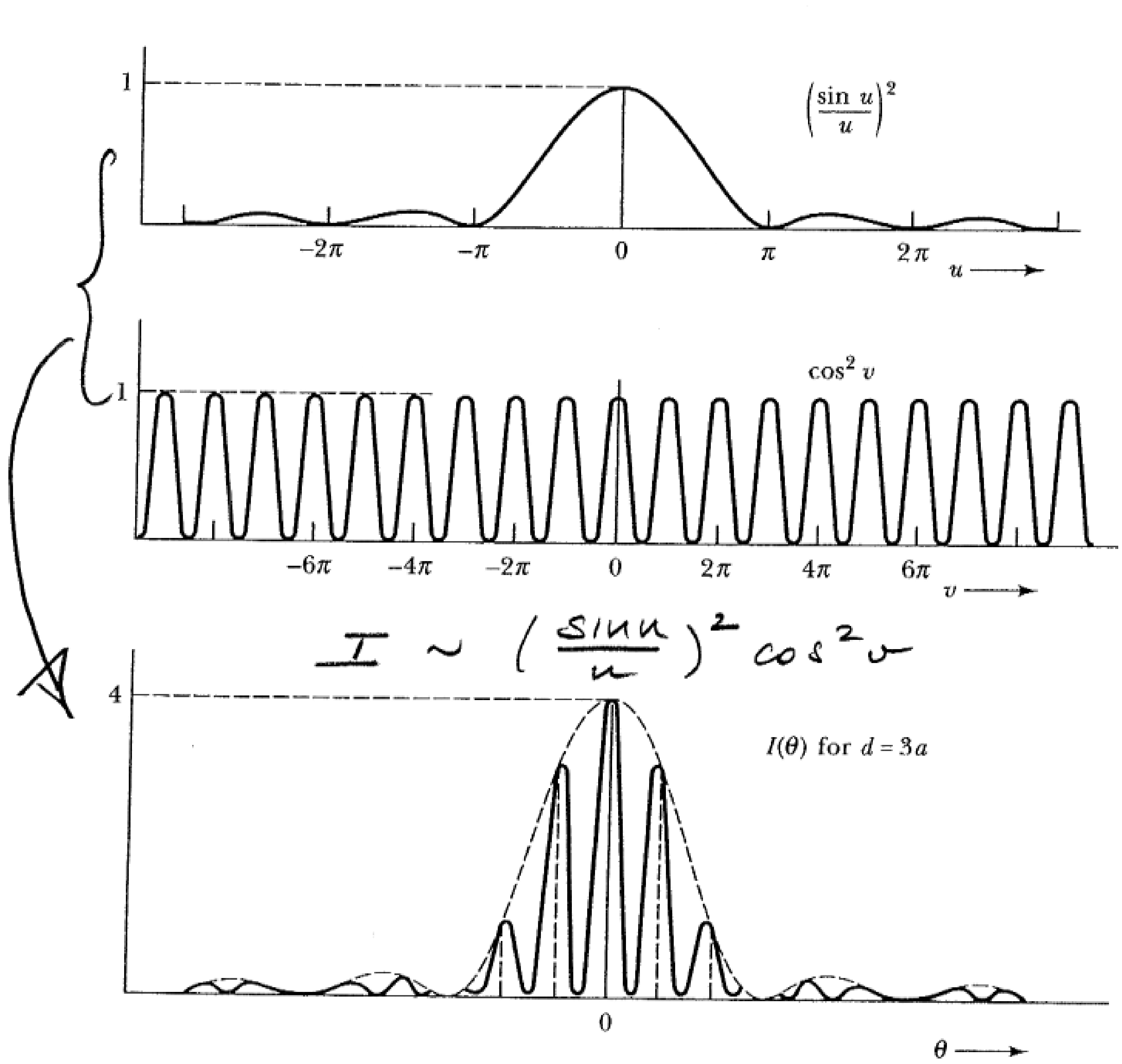


FIGURE 12-18. Diffraction and interference factors for double slit.

c) Rechteckige Apertur

$$\Psi \sim \int_{-a}^{a} e^{-ik\alpha\xi}\, d\xi \int_{-b}^{b} e^{-ik\beta\eta}\, d\eta$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u_a}{u_a}\right)^2 \left(\frac{\sin u_b}{u_b}\right)^2$$

$$u_a = k\alpha a \cong \frac{2\pi a}{\lambda}\,\frac{x}{z}$$

$$u_b = k\beta b \cong \frac{2\pi b}{\lambda}\,\frac{y}{z}$$

Produkt von Mustern an zwei zueinander $\perp$ Spalten.

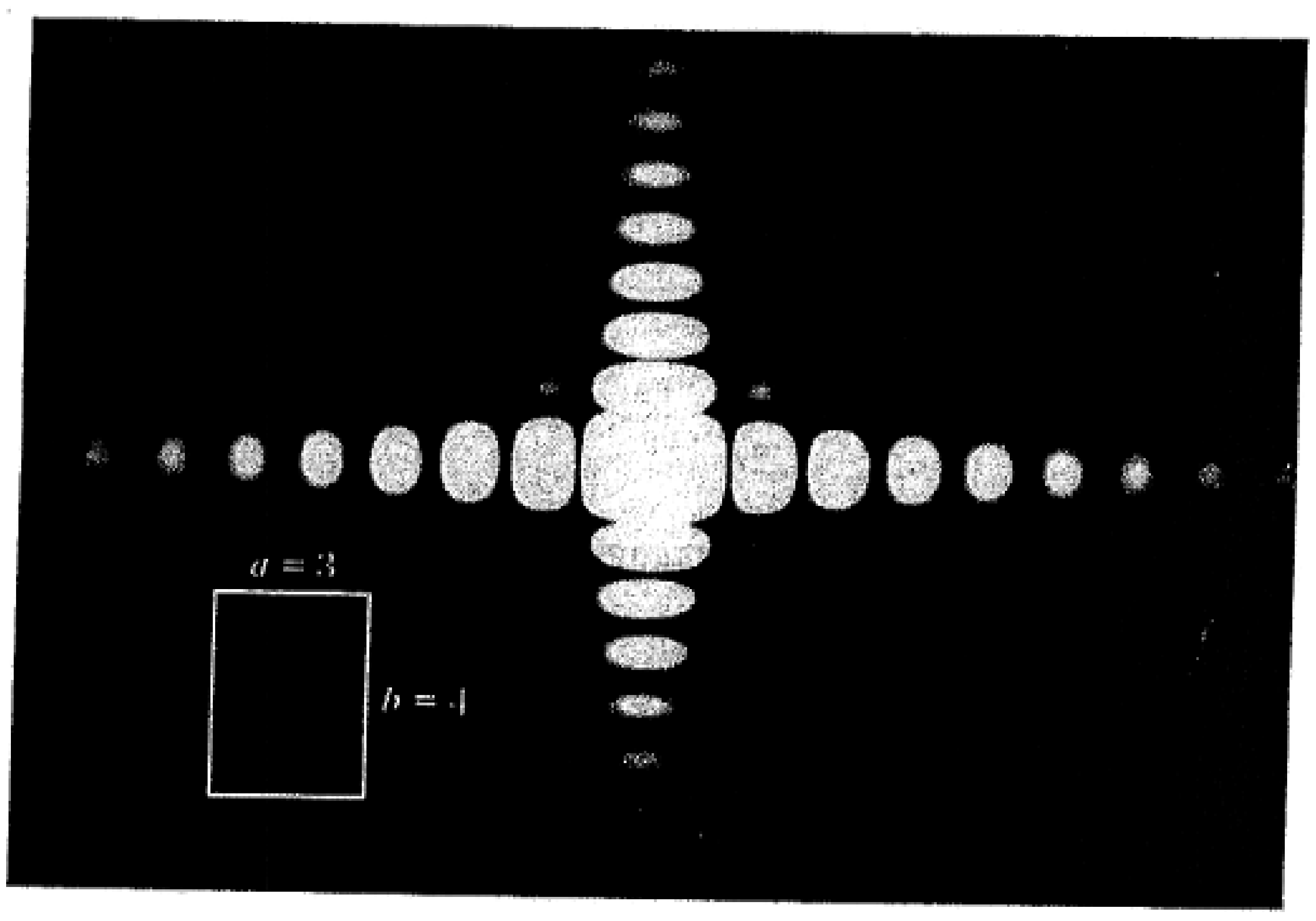


FIGURE 12-20. Diffraction pattern of rectangular aperture.