And from Eqs. (9.33) and (9.35)

$$\mathbf{E}_2 = \left(\frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)\cos\theta\ \mathbf{e}_r + \left(\frac{[\dot{p}]}{cr^2}\right)\sin\theta\ \mathbf{e}_\theta \tag{9.37}$$

(In the equatorial plane, the unit vector $\mathbf{e}_\theta$ is *anti*parallel with the polar axis defined by $\mathbf{p}$.) In this component notation, Eq. (9.28) becomes

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\cos\theta\ \mathbf{e}_r + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\sin\theta\ \mathbf{e}_\theta \tag{9.38}$$

At last, we have the complete evaluation of Eq. (9.24) for the electric field of a time-dependent linear dipole:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

$$= \left(\frac{2[p]}{r^3} + \frac{2[\dot{p}]}{cr^2}\right)\cos\theta\ \mathbf{e}_r + \left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)\sin\theta\ \mathbf{e}_\theta \tag{9.39}$$

Note especially the cancellation of the $[\ddot{p}]$ terms in the radial components of Eqs. (9.37–38). Thus the only inverse *first*-power r dependence is in the $\mathbf{e}_\theta$ component (from $\mathbf{E}_3$), which is the transverse *radiation* term of Eq. (9.13) [see the footnote, p. 290]. The two inverse-*cube* terms are the familiar field of a *static* dipole, Eq. (2.9) [and (2.29)]. The two remaining, inverse-*square*, terms represent the *intermediate* field that we have just worked so hard to find.

Similarly, for the magnetic field of Eq. (9.27),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \left(\frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r}\right)\sin\theta\ \mathbf{e}_\varphi \tag{9.40}$$

in which we recognize the inverse *first*-power term as the *radiation* term of Eq. (9.14). And, in view of Eq. (9.23), the inverse-*square* term is nothing more than the magneto*static* Biot-Savart law of Eq. (1.36) (Problem 9-3). There is no "intermediate" term in the magnetic field.

From Eqs. (9.39–40) we note that, while $\mathbf{E}$ has a radial component in the near-field region, $\mathbf{B}$ has only an azimuthal component at any distance. The radiation from a time-dependent electric dipole is therefore called *transverse magnetic* (TM). At large distances where $E_r \to 0$, both fields are transverse and the radiation is called *transverse electromagnetic* (TEM)—approaching the familiar plane wave of Chapter 5. The radiation from a time-dependent magnetic dipole (Section 9.8) turns out to be *transverse electric* (TE).

The most common time dependence is a sinusoidal oscillation with

$$[p] = p_0\ e^{-i\omega t'} \tag{9.41}$$

where $t' = t - r/c$ is the retarded time. For this case, and with $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$,

aus Heald & Marion "classical electrodynamic radiation"

$$E_r = 2p_0 k^3\left\{\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2}\right\}\cos\theta\ e^{i(kr-\omega t)} \tag{9.42}$$

$$E_\theta = p_0 k^3\left\{\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr}\right\}\sin\theta\ e^{i(kr-\omega t)} \tag{9.43}$$

$$B_\varphi = -p_0 k^3\left\{\frac{i}{(kr)^2} + \frac{1}{kr}\right\}\sin\theta\ e^{i(kr-\omega t)} \tag{9.44}$$

Figure 9-6, adapted from Hertz,* shows the electric field-lines at four instants in a half cycle of the oscillation. At $t = 0$ (lower right frame), the near field has the appearance of a static dipole (compare Fig. 2-2). As time advances, the field-lines bulge, neck down, and finally are pinched off. The

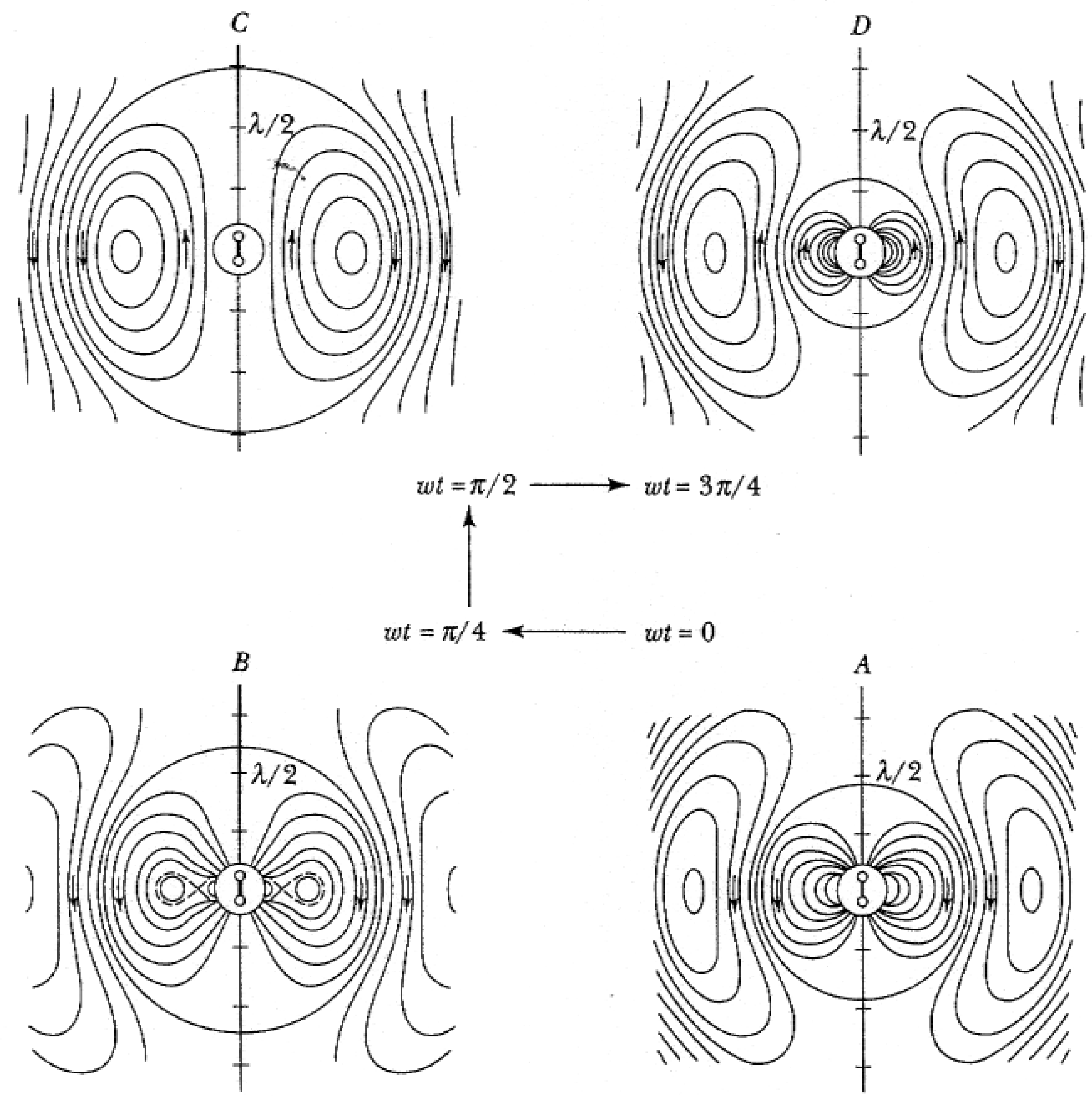
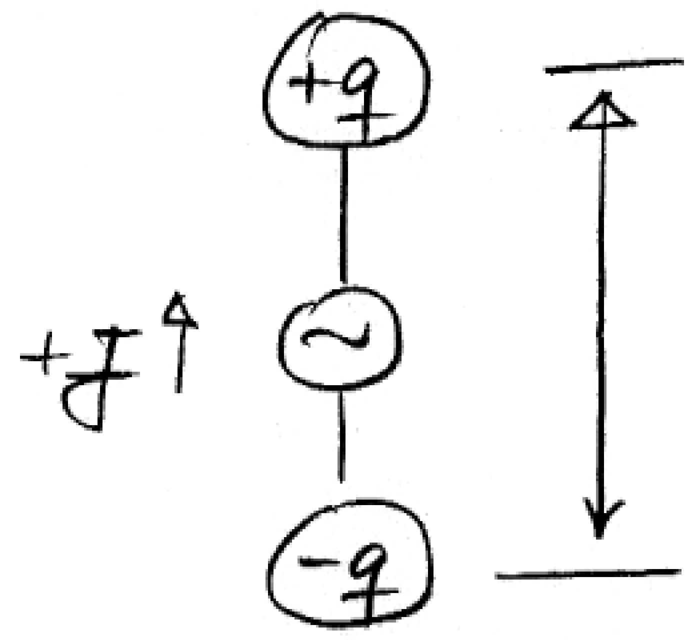


FIGURE 9-6. Snapshots of oscillating dipole. [From Hertz, *Wiedemann's Ann.* **36,** 1 (1889); reprinted in (He62).]

*The properties of the fields in the intermediate region were investigated in detail by Hein-

Strahlungswiderstand

Wir stellen uns den Hertz'schen Dipol als einen zeitabhängigen Generator vor der 2 Kugeln auflädt



Generatorstrom $J = \frac{dq}{dt}$

Dipolmoment $p = q(t)\, d$ $\Big\rangle$ $J = \dot{p}/d$

$$p = p_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow J = J_0 e^{-i\omega t}$$

mit $p_0^2 = (J_0 d/\omega)^2$

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\pi J_0^2}{2c} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \sin^2 \vartheta$$

gemäß der allgem. Formel

$$\left.\frac{dI}{d\Omega}\right|_{Dipol} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \sin^2 \vartheta$$

Die gesamte Leistung ist dann

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3c^3} J_0^2 d^2 \omega^2 = \frac{4\pi^2 J_0^2}{3c} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

Um diese Strahlungsleistung aufrecht zu halten muß der Generator dem

oszillierenden Dipol beständig Energie zuführen
In Analogie zur Joulschen Wärme

$$\langle P \rangle_{Joule} = \langle J^2 \rangle R = \frac{1}{2} J_0^2 R$$

definiert man den Faktor vor $\frac{1}{2} J_0^2$
in P als den Strahlungswiderstand

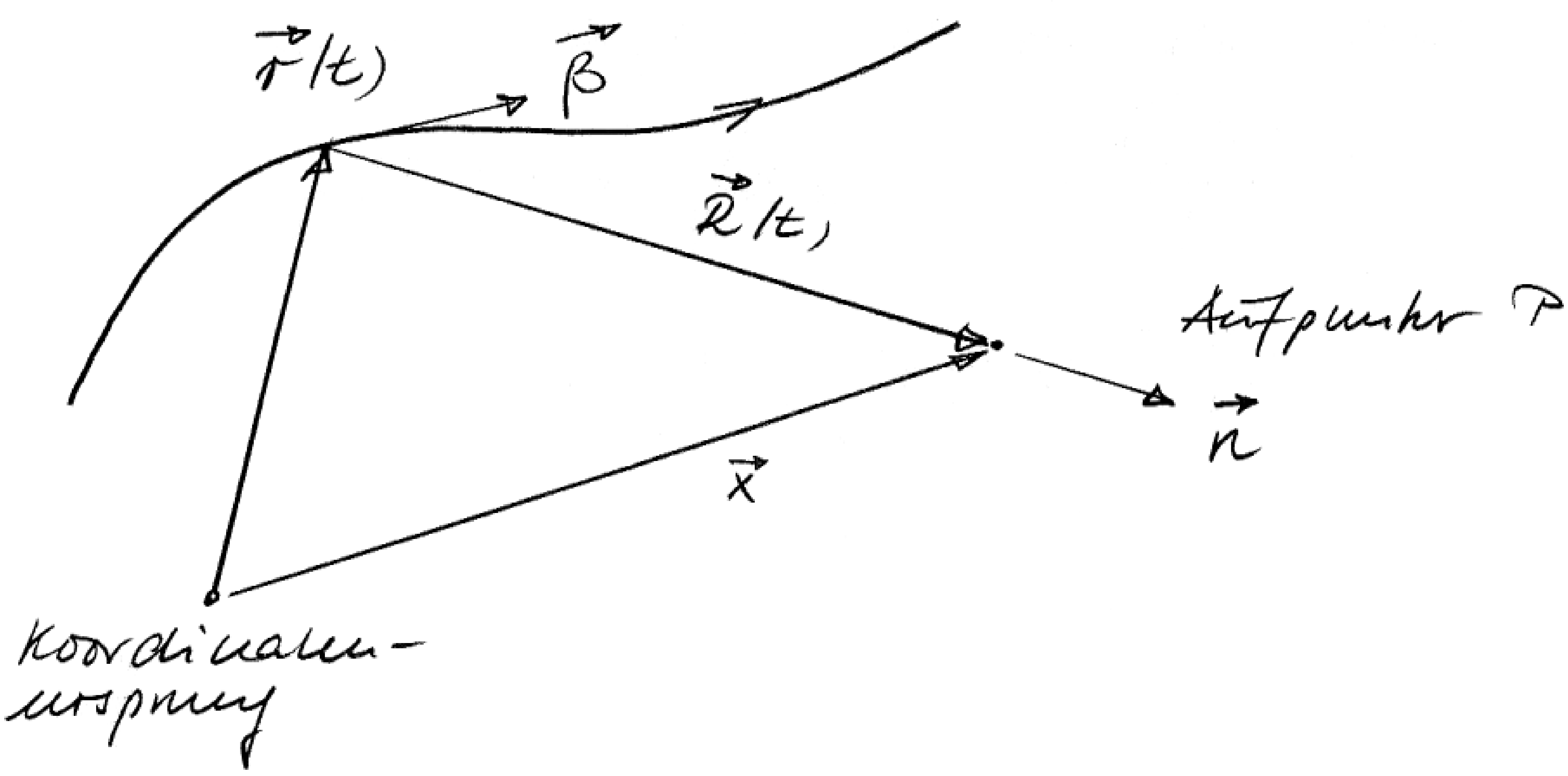
$$R_{Str} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

$$\left(SI: \quad = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \text{Ohm} \right)$$

wegen $\frac{d}{\lambda} \ll 1$ für Hertz'schen Dipol ist
R_{Str} sehr klein!
Effiziente Antennen brauchen $d \sim \lambda$!

7.5. Lienard - Wiechert Potentiale

Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung des elektromagnetischen Feldes einer beliebig bewegten Punktladung e. Wir nehmen an daß sich die Punktladung entlang einer Trajektorie $\vec{r}(t)$ bewegt



$\vec{r}(t)$ Ort der Punktladung

$\vec{x}$ Aufpunkt (Beobachtungspunkt)

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ Teilchengeschwindigkeit

$\vec{\beta}(t) = \frac{1}{c}\vec{v}(t)$

$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{r}(t)$

Abstandsvektor zwischen Beobachtungspunkt P und Aufenthaltsort des Teilchens zur Zeit t

$\vec{n} = \frac{1}{R}\vec{R}$; $R = |\vec{R}|$

Wir können die Punktladung mit Trajektorie $\vec{r}(t)$ auch folgende Ladungs- und Stromdichten beschreiben

$$\rho(\vec{x},t) = e\,\delta(\vec{x}-\vec{r}(t)) \qquad (1a)$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = e\,\vec{v}(t)\,\delta(\vec{x}-\vec{r}(t)) \qquad (1b)$$

Damit ergibt sich für das skalare Potential

$$\varphi(\vec{x},t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$= \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\delta(t'-t+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})$$

$$\underset{(1a)}{=} e\int dt' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{r}(t')|}\,\delta(t'-t+\frac{|\vec{x}-\vec{r}(t')|}{c})$$

$$= e\int dt' \frac{1}{R(t')}\,\delta(t'-t+\frac{1}{c}R(t'))$$

Um die Integration über t' auszuführen definieren wir

$$t'' = t'-t+\frac{1}{c}R(t')$$

Dann gilt

$$dt'' = dt' + \frac{1}{c}\frac{dR(t')}{dt'}dt'$$

$$= dt' - \frac{1}{c}\,\vec{v}(t)\cdot\vec{R}(t')/R(t)$$

$$= dt'\,(1-\vec{\beta}(t)\cdot\vec{n}(t))$$

und folglich

$$\varphi(\vec{x},t) = e\int dt'' \frac{\delta(t'')}{R(t')\,[1-\vec{\beta}(t)\vec{n}(t)]} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(\vec{x},t) = e \left. \frac{1}{R(t')[1-\vec{\beta}(t')\cdot\vec{n}(t')]} \right|_{t' = t - \frac{1}{c}R(t')} \qquad (*)}$$

wobei die retardierte Zeit $t' = t_{ret}$ die Lösung der impliziten Gleichung

$$t' = t - \frac{1}{c} R(t')$$

ist.

Völlig analog findet man

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = \left[\frac{e\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})\cdot R} \right]_{ret} \qquad (**)}$$

wobei $[\ldots]_{ret}$ bedeutet, daß $\vec{\beta}$, $\vec{n}$ und R zur retardierten Zeit $t' = t - \frac{1}{c}R(t')$ auszuwerten sind.

(*) und (**) heissen <u>Lienard-Wichert Potentiale</u>.

Als nächstes wollen wir die Feldstärken $\vec{E}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}(\vec{x},t)$ berechnen. Man kann diese direkt aus (*) und (**) berechnen. Im wesentlichen ist dies eine recht längliche algebraische Rechnung (siehe etwa T. Fließbach, Elektrodynamik). Wir wollen hier einen einfacheren Weg wählen, der von den Helmholtzgleichungen für die elem. Felder ausgeht. Nach Kapitel 7.3 gilt

$$\Delta \vec{E}^{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}^{\omega} = 4\pi \left(\nabla \rho^{\omega} + \frac{-i\omega}{c^2} \vec{j}^{\omega} \right)$$

$$\Delta \vec{B}^{\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}^{\omega} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j}^{\omega}$$

Wir kennen die Lösungen derartiger Helmholtz Gleichungen aus dem Anhang zur Fouriertrans- formation. In der weiteren Rechnung beschränken wir uns auf das elektr. Feld $\vec{E}^{\omega}$ und überlassen die Rechnung für $\vec{B}^{\omega}$ zur Übung.

Für das retardierte Feld gilt

$$\vec{E}^{\omega}(\vec{x}) = -\int d^3x' \, \frac{\exp\left(i \frac{\omega}{c} |\vec{x}-\vec{x}'|\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left[\vec{\nabla}' \rho^{\omega} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{j}^{\omega} \right]$$

wobei

$$\rho^{\omega}(\vec{x}') = \int dt' \, e^{i\omega t'} \rho(\vec{x}', t')$$

$$\vec{j}^{\omega}(\vec{x}') = \int dt' \, e^{i\omega t'} \vec{v}(t') \rho(\vec{x}', t')$$

Folglich gilt

$$\vec{E}^{\omega}(\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' \, e^{i\omega\left(t' + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)} e$$
$$\left(\vec{\nabla}' - \frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(t') \right) \delta\left(\vec{x}' - \vec{r}(t')\right))$$
$$= -e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' \, e^{i\omega\left(t' + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}$$
$$\left(\vec{\nabla}' - \frac{i\omega}{c} \vec{\beta}(t') \right) \delta\left(\vec{x}' - \vec{r}(t')\right))$$

wobei $\vec{\beta} := \frac{1}{c} \vec{v}$

$$= -e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t' + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})} (\vec{\nabla}' - \frac{i\omega}{c}\vec{\beta}(t'))\, \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t))$$

$$= +e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t' + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})} \Big(-\frac{i\omega}{c} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}$$

p. I. im 1. Term

Randterme verschwinden

$$+ \frac{i\omega}{c}\vec{\beta}(t')\Big)\, \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t))$$

$$= e \int dt' e^{i\omega(t' + \frac{1}{c}R(t'))} \left[-\frac{i\omega}{c} \frac{\vec{R}}{R^2} + \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{i\omega}{c}\frac{1}{R}\vec{\beta} \right]$$

$$= e \int dt' e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \frac{1}{R}\left(\frac{\vec{R}}{R^2} - \frac{i\omega}{c}(\vec{n} - \vec{\beta}) \right)$$

$$\overset{*)}{\underset{p.I}{=}} e \int dt' e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \left[\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})} \right) \right]$$

Führe nun die Fourier-Rücktrafo aus

$$\vec{E}(\vec{x},t) = e \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \left[\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{R(t')(1-\vec{\beta}(t')\cdot\vec{n}(t'))} \right) \right]$$

$$= e \int dt' \, \delta(t' - t + \tfrac{R}{c}) \left[\;''\; \right]$$

$$= e \int dt'' \, \delta(t'') \frac{1}{1-\vec{\beta}\vec{n}} \left[\;''\; \right]$$

$$= \left[\frac{e}{1-\vec{\beta}\cdot\vec{n}} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left(\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{R(1+\vec{\beta}\vec{n})} \right) \right) \right]_{ret} .$$

---

*) verwende

$$\frac{d}{dt'} e^{i\omega(t' + R/c)} = i\omega(1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n})\, e^{i\omega(t' + R/c)}$$

und dass bei p. I. die Randterme weggelassen werden können.

Die weitere Rechnung ist die Auswertung der Ableitung im 2. Term. Die Rechnung ist trivial, aber etwas länglich:

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{n}-\vec{\beta}}{R(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})} =$$

$$= \frac{(\dot{\vec{n}}-\dot{\vec{\beta}})(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}) - (\vec{n}-\vec{\beta})(\dot{R}-\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\beta}-\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}})}{(R-\vec{R}\cdot\vec{\beta})^2}$$

$$= \frac{\left[-\dot{\vec{\beta}}(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}) + (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right] + \left[\dot{\vec{n}}(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}) - (\vec{n}-\vec{\beta})(\dot{R}-\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\beta})\right]}{(R-\vec{R}\vec{\beta})^2}$$

a) Beschleunigungsterm $\sim \dot{\vec{\beta}}$

$$= -\dot{\vec{\beta}}(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}) + (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{R}\cdot\dot{\vec{\beta}})$$

$$= R\left(-\dot{\vec{\beta}}(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}) + (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right)$$

$$= R\left(-\dot{\vec{\beta}}((\vec{n}-\vec{\beta})\cdot\vec{n}) + (\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})\right)$$

$$= R\left(\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})\right)$$

$$\uparrow$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$\dot{\vec{R}} = -\dot{\vec{r}} = -\vec{\beta}\cdot c$$

$$\dot{R} = -\vec{\beta}\cdot\vec{n}\,c$$

$$\dot{\vec{n}} = (\vec{R}/R)^{\cdot} = \frac{R\dot{\vec{R}} - \vec{R}\cdot\dot{R}}{R^2} = -\frac{c}{R}(\vec{\beta} - \vec{n}(\vec{\beta}\cdot\vec{n}))$$

$$\dot{\vec{n}} \perp \vec{n}$$

b) Geschwindigkeitsabh. Terme

$$\dot{\vec{n}}\,(R-\vec{\beta}\cdot\vec{R}) - (\vec{n}-\vec{\beta})\,(\dot{R}-\dot{\vec{R}}\cdot\vec{\beta})$$

$$= -\frac{c}{\cancel{R}}\left(\vec{\beta}-\vec{n}(\vec{\beta}\vec{n})\right)\cancel{R}\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})$$

$$-(\vec{n}-\vec{\beta})(-c)\,(\vec{\beta}\cdot\vec{n}-\vec{\beta}^2)$$

$$= -c\Big(\vec{\beta}-\cancel{\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{n})}-\vec{n}(\vec{\beta}\cdot\vec{n})+\vec{n}(\vec{\beta}\vec{n})^2$$
$$-\vec{n}(\vec{\beta}\cdot\vec{n})+\vec{n}\vec{\beta}^2+\cancel{\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\vec{n})}-\vec{\beta}\vec{\beta}^2\Big)$$

$$= -c\Big(\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)-2\vec{n}(\vec{\beta}\cdot\vec{n})+\vec{n}(\vec{\beta}^2)$$
$$+\vec{n}(\vec{\beta}\vec{n})^2\Big)$$

$$= -c\Big(\vec{\beta}(1-\vec{\beta}^2)+\vec{n}(\beta^2-1)$$
$$\vec{n}\,\Big(\underbrace{(\vec{\beta}\vec{n})^2+1-2\vec{n}(\vec{\beta}\cdot\vec{n})}_{(1-\vec{\beta}\vec{n})^2}\Big)\Big)$$

$$= -c\left(-(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)+\vec{n}(1-\vec{\beta}\vec{n})^2\right)$$

Zusammen:

$$= \frac{R\left(\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})\right)-c\left(-(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)+\vec{n}(1-\vec{\beta}\vec{n})^2\right)}{R^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2}$$

$$= \frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{(1-\vec{\beta}\vec{n})^2 R} + \frac{c}{R^2}\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^2} - \underbrace{\frac{c}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}}$$

kürzt den 1. Term in $\vec{E}(\vec{x},t)$

Damit findet man insgesamt

$$\boxed{\vec{E} = e\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R^2} + \frac{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}{c\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^3 R}\right]_{ret}}$$

Eine analoge Rechnung führt auf

$$\boxed{\vec{B} = [n]_{ret} \times \vec{E}}$$

Damit sind die elem. Felder einer beliebig bewegten Ladung explizit bestimmt, sie heissen <u>Lienard - Wichert - Felder</u>.

Der 1. Term in $\vec{E}$ ist das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung. Dieses Feld kann man auch über eine Lorentz-transformation aus dem elektrischen Feld einer ruhenden Punktladung berechnen (siehe späteres Kapitel zur kovarianten Formulierung der Elektrodynamik).
Dieser 1. Term ist proportional zu $1/R^2$ und trägt damit auch nicht zur Strahlung bei. Dies ist konsistent mit der Lorentz-invarianz der Elektrodynamik, da man immer in ein Bezugsystem gehen kann (für $\vec{\beta}=0$) in welchem die Punkt-ladung ruht und folglich nicht strahlen kann.

Der 2. Term ist proportional ~~zur~~ Teilchen-beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$. Er fällt wie $1/R$ ab und bestimmt folglich die Abstrahlung.

Der zugehörige Energiefluss in Richtung von $\vec{n} = \vec{R}/R$ lautet

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{S}\cdot\vec{n} &= \frac{c}{4\pi}\,|\vec{E}|^2 \\ &= \frac{1}{4\pi R^2}\,\frac{e^2}{c}\left[\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^6}\,\left|\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)\right|^2\right]_{ret} \end{aligned}}$$

Man merke sich, daß die Richtung des Vektors innerhalb des Absolutbetrages die Richtung des $\vec{E}$-Feldes angeben, d.h. die Polarisation der Strahlung.
Beachte auch daß für den Strahlungsanteil $\vec{E}$ und $\vec{B}$ $\perp$ $\vec{n}$ sind.

7.6. Strahlung von beschleunigten Punktladungen

Der Ausdruck $\vec{S}$ gibt die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung von $\vec{n}$ (am Aufpunkt) abgestrahlte Energie zur Zeit t an. Diese Strahlung wurde zur Zeit $t_{ret} = t - R(t_{ret})/c$ ausgestrahlt. Interessant für uns ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro retardierter Zeiteinheit verliert. Wegen

$$\frac{dt_{ret}}{dt} = 1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n}$$

ist die Strahlungsleistung in den Raumwinkel $d\Omega$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dI(t_{ret})}{d\Omega} &= R^2(\vec{S}\cdot\vec{n})\frac{dt}{dt_{ret}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi c}\frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5}\,\Big|\underbrace{\vec{n}\times((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}})}_{\text{Richtung des E-Feldes}}\Big|^2 \end{aligned}}$$

Diese wichtige Formel werden wir im folgenden mehrfach anwenden.

BEACHTE

Notation $I \equiv P$ (Leistung)

(a) Nichtrelativistischer Grenzfall ($\beta \ll 1$)

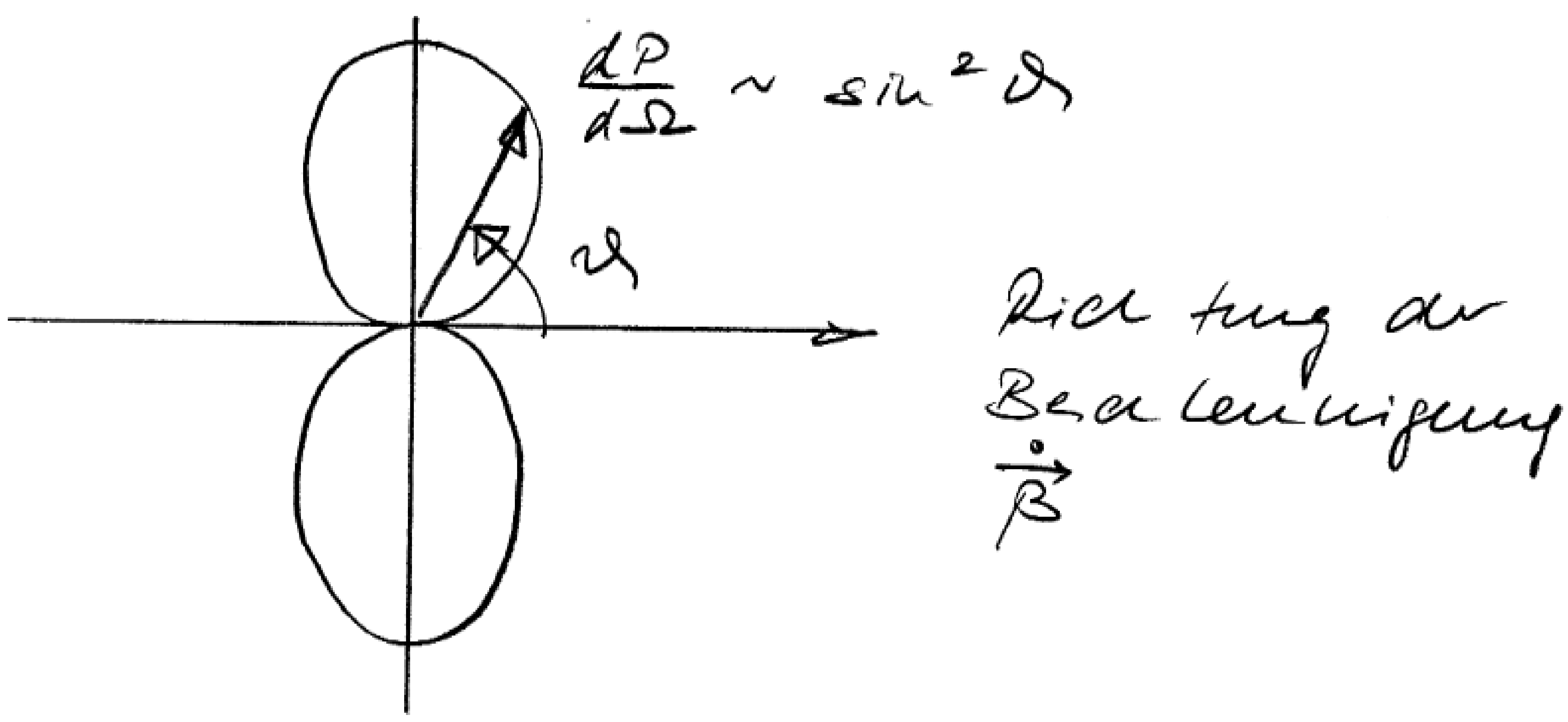
Dieser Fall ist z.B. für Röntgenstrahlen realisiert. Wenn die Elektronen in Metallen abgebremst werden, führt dies zu einer elem. Strahlung, der sog. Bremsstrahlung

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} \cong \frac{e^2}{4\pi c} \left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right|^2} \qquad \beta \ll 1$$

$$\vartheta = \sphericalangle (\vec{n}, \dot{\vec{\beta}})$$

Die abgestrahlte Leistung $dP/d\Omega$ hängt nicht von der Richtung der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ ab, weder von der Richtung noch von der Größe der Geschwindigkeit

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \left| \dot{\vec{\beta}} \right|^2 \sin^2\vartheta}$$



Die Strahlungsleistung wird als Polarkoordinate $\rho = dP/d\Omega$ im ρ-ϑ Diagramm aufgetragen.

Die gesamte Strahlungsleistung beträgt

$$\boxed{P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{v}}^{\,2} \qquad (\text{Larmor Formel})}$$

(b) Relativistische Verallgemeinerung der Larmor Formel

Man kann die relativistische Verallgemeinerung auch mit etwas Mühe durch Winkelintegration des allgemeinen Ausdrucks für $dP/d\Omega$ erhalten. Einfacher geht dies mit einer relativistischen Überlegung. Da die abgestrahlte Energie dE_s in der Zeit dt_{ret} gleich $P\,dt_{ret}$ ist und dE_s die 0-Komponente eines 4er Vektors ist, muß P lorentzinvariant sein (dt_{ret} ist 0-Komponente des 4er Vektors x^μ).

$P =$ Lorentzskalar

P darf nur von $\vec{\beta}$ und $\dot{\vec{\beta}}$ abhängen wie ein Blick auf die Gleichung für $dP/d\Omega$ zeigt. Durch diese Forderung und den bereits berechneten nichtrel. Grenzfall ist P eindeutig bestimmt

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{m^2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\longrightarrow -\frac{2e^2}{3c^3 m^2} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

wobei p der Viererimpuls ist und τ die Eigenzeit

$$p^\mu = m\gamma(c,\vec{v}) = \left(\frac{E}{c},\vec{p}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}$$

$$= m^2c^2 \qquad \text{da Lorentzskalar}$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$c\,dt = \gamma c\, d\tau \qquad \left(d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}\right)$$

Diese Umformulierung ist die einzig mögliche, denn man hat nur die 4er Vektoren p und $dp/d\tau$ zur Verfügung stehen. Wegen $p\cdot p = m^2c^2$ ist $p\cdot\frac{dp}{d\tau} = 0$

Wir wollen nun den relativistisch kovarianten Ausdruck

$$\boxed{P = -\frac{2e^2}{3m^2c^3}\,\frac{dp^\mu}{d\tau}\,\frac{dp_\mu}{d\tau}}$$

und durch $\vec{\beta}$ und $\dot{\vec{\beta}}$ ausdrücken.

$$\frac{dp}{d\tau} = \left(\frac{d}{d\tau}(m\gamma c),\ \frac{d}{d\tau}(m\gamma\vec{v})\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}mc,\ \frac{m\vec{v}(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{mc\dot{\vec{\beta}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$= (mc)\left(\gamma^4\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}},\ \gamma^4\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}}) + \gamma^2\dot{\vec{\beta}}\right)$$

die Minkowski Länge davon ist

$$-\frac{dp}{d\tau}\frac{dp}{d\tau} = m^2c^2\gamma^6\Big[(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\vec{\beta}^2\gamma^2 + 2(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2 + \frac{1}{\gamma^2}(\dot{\vec{\beta}})^2 - \gamma^2(\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2\Big]$$

$$= m^2c^2\gamma^6\Big[(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})^2(\gamma^2\beta^2+2-\gamma^2) + \frac{1}{\gamma^2}(\dot{\vec{\beta}})^2\Big]$$

wir benützen $(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2 = \vec{\beta}^2\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2$
und erhalten

$$-\frac{dp}{d\tau}\frac{dp}{d\tau} = m^2c^2\gamma^6\Big[-(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2 + \vec{\beta}^2\dot{\vec{\beta}}^2 + \frac{1}{\gamma^2}\dot{\vec{\beta}}^2 \underbrace{-(\vec{\beta}\dot{\vec{\beta}})^2 + (\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\beta}})^2(\gamma^2\beta^2+2-\gamma^2)}_{=0}\Big]$$

$$-\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^2 = m^2c^2\gamma^6\left(\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\right)$$

Folglich finden wir

$$\boxed{P = \frac{2e^2}{3c}\gamma^6\Big[\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})^2\Big]}$$

c) Lineare Bewegung $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$

Dieser einfache Fall ist insbesondere für Linearbeschleuniger relevant.

$$\vartheta = \measuredangle(\vec{\beta}, \vec{n})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{1}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{n})^5} \left| \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \right|^2$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^3}{(1-\beta\cos\vartheta)^5} \sin^2\vartheta$$

$\beta \ll 1 \quad \rightsquigarrow$ Larmor Formel

$\beta \to 1 \quad \rightsquigarrow$ Strahlung hauptsächl. in Vorwärtsrichtung

Die Intensität wird maximal bei

$$\vartheta_{max} = \cos^{-1}\left[\frac{1}{3\beta}\left(\sqrt{1+15\beta^2} - 1\right)\right] \xrightarrow[\beta \to 1]{} \frac{1}{2\gamma}$$

In diesem extrem relativistischen Fall ist die Intensität beim Maximum $\sim \gamma^8$. Die Strahlung ist in einem kleinen Kegel in der Vorwärtsrichtung konzentriert. Näherungsweise gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \cong \frac{8}{\pi} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^8 \frac{(\gamma\vartheta)^2}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^5}$$

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \frac{1}{\gamma}$$

Die gesamte Strahlungsleistung ist nach der allgemeinen Formel

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6\left[\dot{\vec{\beta}}^{\,2}\right]$$

$$= \frac{2e^2}{3c}\dot{v}^2\gamma^6$$

$\rightarrow$ siehe Figur nächste Seite für $\frac{dP}{d\Omega}$

SLAC: e in 3 km auf 50 GeV

Die Strecke auf der die Energie um die Ruhemasse des Elektrons erhöht wird ($m_e c^2 = 0.5$ MeV) ist

$$l = \frac{m_e c^2}{dE/dl} = \frac{0.5\,\text{MeV}}{50\,\text{GeV}/3\,\text{km}} = 3\,\text{cm}$$

Hoch rel. Fall ($E \gg m_e c^2$): $E \approx pc$ und $v \approx c$

$$\rightsquigarrow \frac{dp}{dt} \approx \frac{d(E/c)}{dt} \approx \frac{d(E/c)}{dl/c} = \frac{dE}{dl} = \frac{m_e c^2}{l}$$

$$\Delta E_{str}(l = 3\,\text{cm}) \cong P\cdot\frac{l}{c}$$

$$\cong \frac{2e^2}{3m_e^2c^3}\left(\frac{m_e c^2}{l}\right)^2\frac{l}{c} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{l} = \frac{2}{3}\frac{14.4\,\text{eV}}{3\,\text{cm}/\text{Å}}$$

$$\cong 3\cdot 10^{-8}\,\text{eV} \lll \Delta E = m_e c^2 \approx 5\cdot 10^5\,\text{eV}$$

$$\left(\frac{e^2}{\text{Å}} = 14.4\,\text{eV}\right)$$

Strahlungsverluste für SLAC vernachlässigbar!

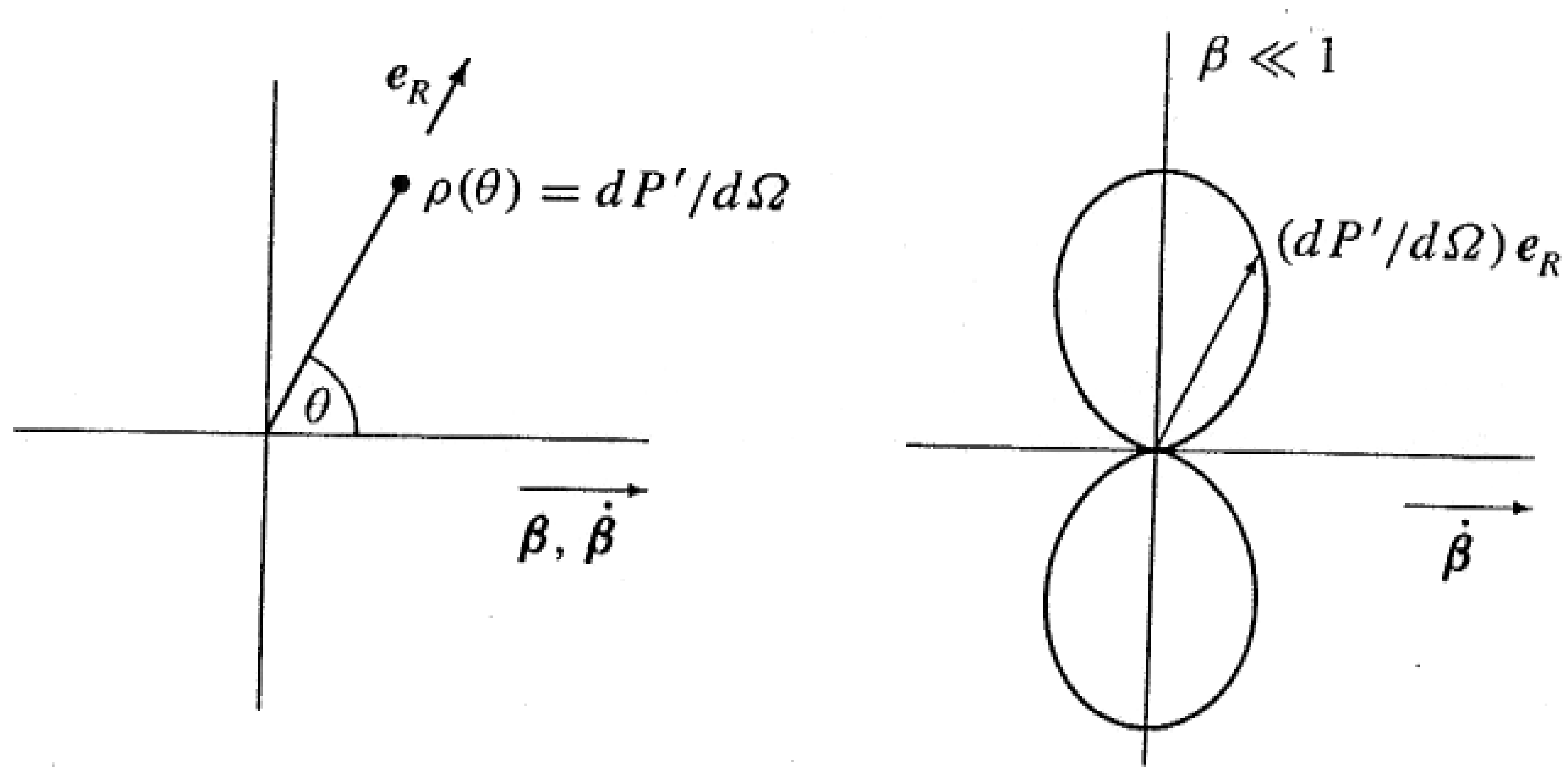


Abbildung 23.3 Die Strahlungsleistung (23.31) wird als Polarkoordinate $\rho = dP'/d\Omega$ im ρ-θ-Diagramm aufgetragen (links). Dabei ist θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{v} \parallel \dot{\boldsymbol{v}}$ und der Ausstrahlungsrichtung $\boldsymbol{e}_R$. Rechts ist die Strahlungsleistung $dP'/d\Omega \propto \sin^2\theta$ für $\beta \ll 1$ gezeigt. In Richtung von $\boldsymbol{e}_r$ ist ein Vektor mit dem Betrag $dP'/d\Omega$ eingezeichnet. Für $\beta \ll 1$ ist die Abstrahlung unabhängig von der Richtung von $\boldsymbol{v}$. Die abgestrahlte Leistung ist proportional zu $\dot{\boldsymbol{v}}^2$.

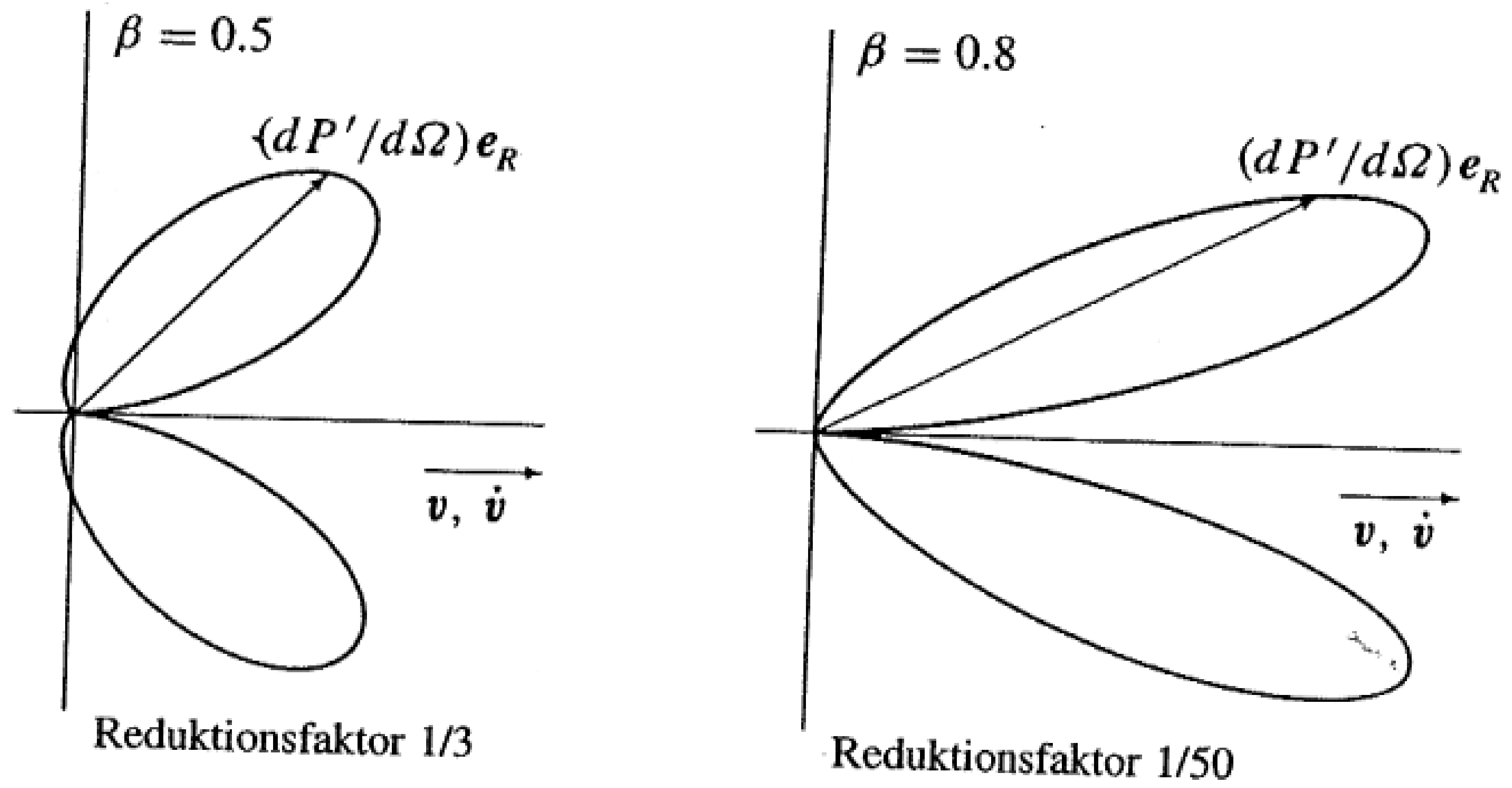


Abbildung 23.4 Winkelverteilung der Abstrahlung (23.31) einer beschleunigten Ladung für $\beta = 0.5$ und $\beta = 0.8$, jeweils für $\boldsymbol{v} \parallel \dot{\boldsymbol{v}}$. Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die Strahlung stark an und ist immer mehr nach vorn gerichtet. Die hier gezeigten Kurven wären in jeder Richtung um den Faktor 3 beziehungsweise 50 zu strecken, wenn man sie in Abbildung 23.3 rechts einzeichnen wollte; der Wert von $\dot{\boldsymbol{v}}^2$ ist dabei in allen Fällen derselbe.

Fließbach, Elektrodynamik