Die Legendre Polynome sind für unterschiedliche Werte von l im Intervall $-1 \leq \xi \leq 1$ orthogonal, d. h.

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_l(\xi)\, P_{l'}(\xi)\, d\xi = \frac{2}{2l+1}\, \delta_{ll'}}$$

Dies zeigt man leicht durch Verwendung der Rodriguez-Formel und sukzessiver partieller Integration. Da die Potenzen von ξ im Intervall $-1 \leq \xi \leq 1$ einen vollständigen Satz von Funktionen darstellen, sind auch die Legendre Polynome vollständig. Wir können daher jede Funktion $f(\xi)$ in der Form

$$\boxed{f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\xi)}$$

mit den Koeffizienten

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi)\, P_l(\xi)\, d\xi$$

schreiben.

(1) Legendre Gleichung mit $1 \leq \rho < \infty$

Hier entspricht der singuläre Punkt $\rho = 1$ dem Ursprung des Koordinatensystems.
Wenn wir also Lösungen der Legendre Gleichung suchen, die diesen Punkt enthalten, so müssen wir die regulären Lösungen $P_\ell(\rho)$ verwenden.
Falls aber die Lösung in einem Raumgebiet gesucht wird, das $\rho = 1$ nicht enthält, also hier außerhalb des Rotationsellipsoids, können wir auch die linear unabh. Funktionen $Q_\ell(\rho)$ hinzunehmen. Diese divergenten Funktionen nennt man auch Legendre funktionen der 2. Art.

Da für $1 \leq \rho < \infty$ der Potenzreihenansatz nicht konvergiert, außer man bricht die Reihe ab, müssen wir die Lösung Q_ℓ auf einem anderen Weg finden.

Sei $R_\ell(\rho) = P_\ell(\rho) \, S_\ell(\rho)$
die Lösung der Legendre Gleichung, und $S_\ell(\rho)$ eine noch zu bestimmende Funktion.

$$(\rho^2 - 1)\left(P_\ell S_\ell'' + 2 P_\ell' S_\ell' + S_\ell P_\ell''\right) +$$

$$+ 2\rho\left(P_\ell S_\ell' + S_\ell P_\ell'\right) - \ell(\ell+1) S_\ell P_\ell = 0$$

wobei wir die Abkürzung $' = \frac{\partial}{\partial \rho}$ eingeführt haben.

Nun genügt aber P_ℓ der Legendre Gl.

$$(\rho^2-1)\, P_\ell'' + 2\rho\, P_\ell' + \ell(\ell+1)\, P_\ell = 0$$

Folglich gilt

$$(\rho^2-1)(P_\ell S_\ell'' + 2P_\ell' S_\ell' + \cancel{S_\ell P_\ell''}) - (\rho^2-1)\, \cancel{S_\ell P_\ell''}$$
$$+ 2\rho\, (P_\ell S_\ell' + \cancel{P_\ell' S_\ell}) - 2\rho\, \cancel{P_\ell' S_\ell} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\rho^2-1)\left[2P_\ell' S_\ell' + P_\ell S_\ell''\right] + 2\rho\, P_\ell S_\ell' = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2-1)\, P_\ell^2\, S_\ell'\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_\ell(\rho) = a \int \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2-1)\, P_\ell^2(\tilde{\rho})}$$

wobei a eine Konstante ist

Wir wählen die Normierung so, daß

$$\boxed{Q_\ell(\rho) = P_\ell(\rho) \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2-1)\, P_\ell^2(\tilde{\rho})}}$$

$\ell = 0$: $$Q_0(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2-1)} = \operatorname{arccoth} \rho$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} \;;$$

$$\rho \to \infty \qquad \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} = \ln \frac{1+1/\rho}{1-1/\rho} =$$
$$\cong \ln\left(1+\frac{2}{\rho}\right) \cong \frac{2}{\rho} \;;$$

$l=1$; $Q_1(\rho) = \rho \int_\rho^\infty d\tilde\rho \, \frac{1}{(\tilde\rho^2-1)\,\tilde\rho^2} =$

$$= \rho \left[\operatorname{arccoth} \rho - \frac{1}{\rho} \right]$$

$$= \rho \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} - \frac{1}{\rho} \right]$$

$$\cong \rho \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{3\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right] = \frac{1}{3\rho^2}$$

Damit läßt sich nun das ursprüngliche Problem sehr leicht lösen

(iii) Implementierung der Randbedingungen

$$\varphi(\rho,\xi) = 0 \quad \text{für } \rho = \frac{a}{c}$$

$$\varphi(\rho,\xi) = -cE_0\rho\xi \quad \text{für } \rho \to \infty$$

$$= -cE_0 P_1(\rho) P_1(\xi)$$

$$\uparrow \; l = 1$$

Um nun $\varphi(\rho,\xi) = 0$ auf dem Rand des Rotationsellipsoids zu erreichen addieren wir Konstante $\cdot\, Q_1(\rho) P_1(\xi)$

$$\varphi(\rho,\xi) = E_0 c \rho \xi \left[\frac{\operatorname{arccoth}\rho - \frac{1}{\rho}}{\operatorname{arccoth}\frac{a}{c} - \frac{c}{a}} - 1 \right]$$

Auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids ist das elektrische Feld normal zu der Oberfläche

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$$

$$= E_0 \xi \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-c^2\xi^2}}\left[1+\frac{c^2}{\frac{a}{c}(a^2-c^2)\left(\operatorname{arctanh}\frac{c}{a}-\frac{c}{a}\right)}\right]$$

Für langgestreckte Rotationsellipsoide $\frac{a}{b} \gg 1$ kann die Erhöhung des elektrischen Feldes an der Spitze ($\xi = 1$) extrem hoch sein

Der Krümmungsradius R der Oberfläche ist $R = b^2/a$. Für eine spitze Nadel ($\frac{R}{a} \ll 1$) gilt

$$E \approx E_0 \frac{2a/R}{\ln(4a/R)}$$

$$E_0 = 5 \cdot 10^6 \; V/m$$

$$a = 1\,cm, \quad R = 1\,\mu m$$

$$\Rightarrow \quad E \cong 10^{10} \; V/m$$

Feld in Atomen und Molekülen

Diese Felderhöhung erklärt auch die Funktionsweise eines Blitzableiters. Bevor der Blitz einschlägt, wird das elektrische Feld an der Spitze des Stabes so stark erhöht, daß die umgebende Luft ionisiert wird. Dies stellt dann ein hoch leitendes

Medium aus, daß sich nach oben in Richtung des elektr. Feldes erstreckt. Dies führt dann dazu daß die Ladung über die Spitze abfließt und so den Blitz anzieht.

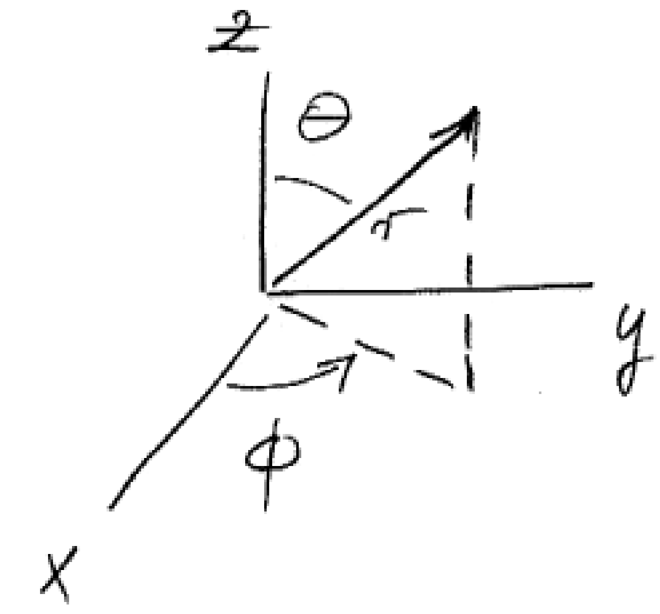
Schritte der Lösung waren

1. Geeignetes krummliniges Koordinatensystem
2. Laplace Operator in diesen Koordinaten
3. Separationsansatz PDE → ODE
4. Eigenfunktionen der ODE
5. Konstruktion der Lösung des RW-Problems aus den Eigenfunktionen.

Dies ist die allgemeine Vorgehensweise!

e) Sphärische Symmetrie: Kugelflächenfunktionen

Polarkoordinaten



$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

Laplaceoperator *)

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

Die Laplacegleichung lautet daher

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}_{= r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

Separationsansatz

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r} R(r)\, u(\cos\theta)\, F(\phi)$$

Substitution in die Laplacegleichung und anschliessendes Teilen durch φ ergibt

$$(1-\eta^2)\left\{\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{u}\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right]\right\} + \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2} = 0$$

wobei $\eta := \cos\theta$

Da der letzte Term nur eine Funktion von ϕ ist muß er konstant sein. Die Separationskonstante bezeichnen wir mit $(-m^2)$:

$$\frac{d^2F}{d\phi^2} = -m^2 F \quad \Rightarrow \quad F \sim e^{\pm i m \phi} \qquad (1)$$

*) Zu krummlinigen Koordinaten siehe Kapitel 7 in S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs, Teubner

Da das Potential eine eindeutige Funktion sein muß gilt für F

$F(\phi) = F(\phi + 2n\pi)$ für $n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \exp[im(\phi + 2n\pi)] = \exp[im\phi]$

$\Leftrightarrow \exp[imn\phi] = 1 \Leftrightarrow \underline{m \in \mathbb{Z}}$

Folglich gilt

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{u}\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] - \frac{m^2}{1-\eta^2} = 0$$

Der erste Term ist nur eine Funktion von r, folglich konstant. Wähle die Separationskonstante als $l(l+1)$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = l(l+1)\frac{R}{r^2} \qquad (2)$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right]u = 0 \qquad (3)$$

(2) hat die Lösungen r^{l+1} und r^{-l} so dass die allgemeine Lösung lautet

$$\frac{R(r)}{r} = A r^l + B \frac{1}{r^{l+1}}$$

A und B sind Konstanten, l ist noch nicht festgelegt.

Falls azimutale Symmetrie vorliegt, reduziert sich die Gleichung (3) auf die Legendre Differentialgleichung $(m = 0)$, die wir bereits ausführlich diskutiert haben.

Insbesondere haben wir gelernt dass die Lösungen an den singulären Punkten $\eta = \pm 1$ divergiert wenn nicht l eine ganze Zahl ist.

Für $m \neq 0$ heisst (3) die verallgemeinerte Legendre Gleichung. Ihre Lösungen findet man auf die gleiche Weise wie bei der Legendre Differentialgleichung

Sei $z = (1-\eta^2)^l$

Diese Funktion genügt der Differentialgleichung

$$(1-\eta^2)\frac{dz}{d\eta} + 2lz = 0$$

Differenziert man nun diese Gleichung $l+m+1$ fach und multipliziert anschliessend mit $(1-\eta^2)^{m/2}$, so erhält man

$$(1-\eta^2)^{1+m/2}\frac{d^{l+m+2}z}{d\eta^{l+m+2}} - (m+1)\eta(1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^{l+m+1}z}{d\eta^{l+m+1}}$$

$$+ (l+m+1)(l-m)(1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}z}{d\eta^{l+m}} = 0. \quad (*)$$

Sei nun $V = (1-\eta^2)^{m/2}\dfrac{d^{l+m}z}{d\eta^{l+m}}$

Dann

$$\frac{dV}{d\eta} = (1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^{l+m+1}z}{d\eta^{l+m+1}} - m\eta(1-\eta^2)^{m/2-1}\frac{d^{l+m}z}{d\eta^{l+m}}$$

so dass dann $(*)$ sich schreiben lässt als

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dV}{d\eta}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right]V = 0$$

also die verallgemeinerte Legendre Gleichung für V

Mit der geeigneten (Konvention!) Normierung lautet die verallgemeinerte Rodriguez Formel

$$\boxed{P_l^m(\eta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\eta^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\eta^{l+m}}(\eta^2-1)^l}$$

assoziierte Legendre Polynome

P_l^m verschwindet für $m > l$

Man zeigt leicht, daß

$$P_l^{-m}(\eta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\eta)$$

Damit nimmt m nur die ganzen Zahlen $-l \leq m \leq l$ an.

Die ersten assoziierten Legendre Polynome lauten

$$P_0^0(\eta) = P_0(\eta) = 1$$

$$P_1^0(\eta) = P_1(\eta) = \eta$$

$$P_1^1(\eta) = -\sqrt{1-\eta^2}$$

$$P_2^0(\eta) = P_2(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta^2-1)$$

$$P_2^1(\eta) = -3\eta\sqrt{1-\eta^2}$$

$$P_2^2(\eta) = 3(1-\eta^2)$$

Die Legendre Polynome sind auf dem Intervall $-1 \leq \eta \leq 1$ ein vollständiger Satz von Funktionen, so daß man jede Funktion $f(\theta)$ im Intervall $0 \leq \theta \leq \pi$ durch diese darstellen kann. Um Funktionen $f(\theta, \phi)$ darzustellen, verwendet man die assoziierten Legendre Polynome in Produkten der Form $P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$.
Wir definieren die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\; P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}$$

$$-\ell \leq m \leq \ell$$

Es gilt $\quad Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell,-m}(\theta, \phi)$

und die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; Y_{\ell m}^*(\theta, \phi)\, Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}$$

Daher kann man jede auf der Oberfläche der Einheitskugel definierte Funktion in der Form

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m}\, Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

darstellen, wobei wegen der Orthogonalität

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; Y_{\ell m}^*(\theta, \phi)\, f(\theta, \phi)$$

gilt.

„Kurzschreibweise"

$$|f\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} \, |lm\rangle$$

$$\langle l'm' | lm\rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$a_{lm} = \langle lm | f\rangle$$

Wichtige Relationen

(1) $$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \, Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

(2) $$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') \, Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$r_{<(>)}$ sind der kleinere (größere) der Längen r und r'; $|\vec{x}| = r$, $|\vec{x}'| = r'$.

6.3. Multipolentwicklung

(a) Elektrostatische Multipole

Für eine gegebene Ladungsverteilung ρ lautet das elektrostatische Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \int d^3y \, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Wir interessieren uns für das Potential in großer Entfernung der Ladungsverteilung: $|\vec{x}| \gg d$, wobei d die räumliche Ausdehnung der Ladungsverteilung ist.
Dann kann man

$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$ im Integranden der Poissonformel

in einer Taylorreihe entwickeln

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{y}\cdot\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\Big|_{\vec{y}=0}$$

$$+ \frac{1}{2} y_i y_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\Big|_{\vec{y}=0} + \ldots$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{y}\cdot\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} y_i y_j \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} + \ldots$$

Folglich gilt

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{r}\int d^3y \, \rho(\vec{y}) + \frac{\vec{x}}{r^3}\cdot \int d^3y \, \vec{y}\,\rho(\vec{y})$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5} \int d^3y \, y_i y_j \, \rho(\vec{y}) + \ldots$$

Mit den Definitionen

$Q := \int d^3y\, \rho(\vec{y})$ Gesamtladung

$Q_i := \int d^3y\, y_i\, \rho(\vec{y}) = p_i$ Dipolmoment

$Q_{ij} := \frac{1}{3} \int d^3y\, \left(3 y_i y_j - |\vec{y}|^2 \delta_{ij}\right) \rho(\vec{y})$ Quadrupolmoment

$Q_{ij} = Q_{ji}$

$\mathrm{Tr}\, Q = 0$

folgt *)

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{ij}\,(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} + \dots}$$

Allgemein hat man eine Entwicklung nach spurlosen Tensoren ($\rightarrow$ Theorie der harmonischen Polynome)

Beachte, daß man anstatt $y_i y_j$ im Quadrupoltensor $y_i y_j - \frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \delta_{ij}$ schreiben kann, da

$$\frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \delta_{ij} \left(3 x_i x_j - r^2 \delta_{ij}\right) = \frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \Big(3 \underbrace{x_i x_i}_{r^2} - r^2 \underbrace{\delta_{ii}}_{=3}\Big) = 0$$

Elektrischer Dipol

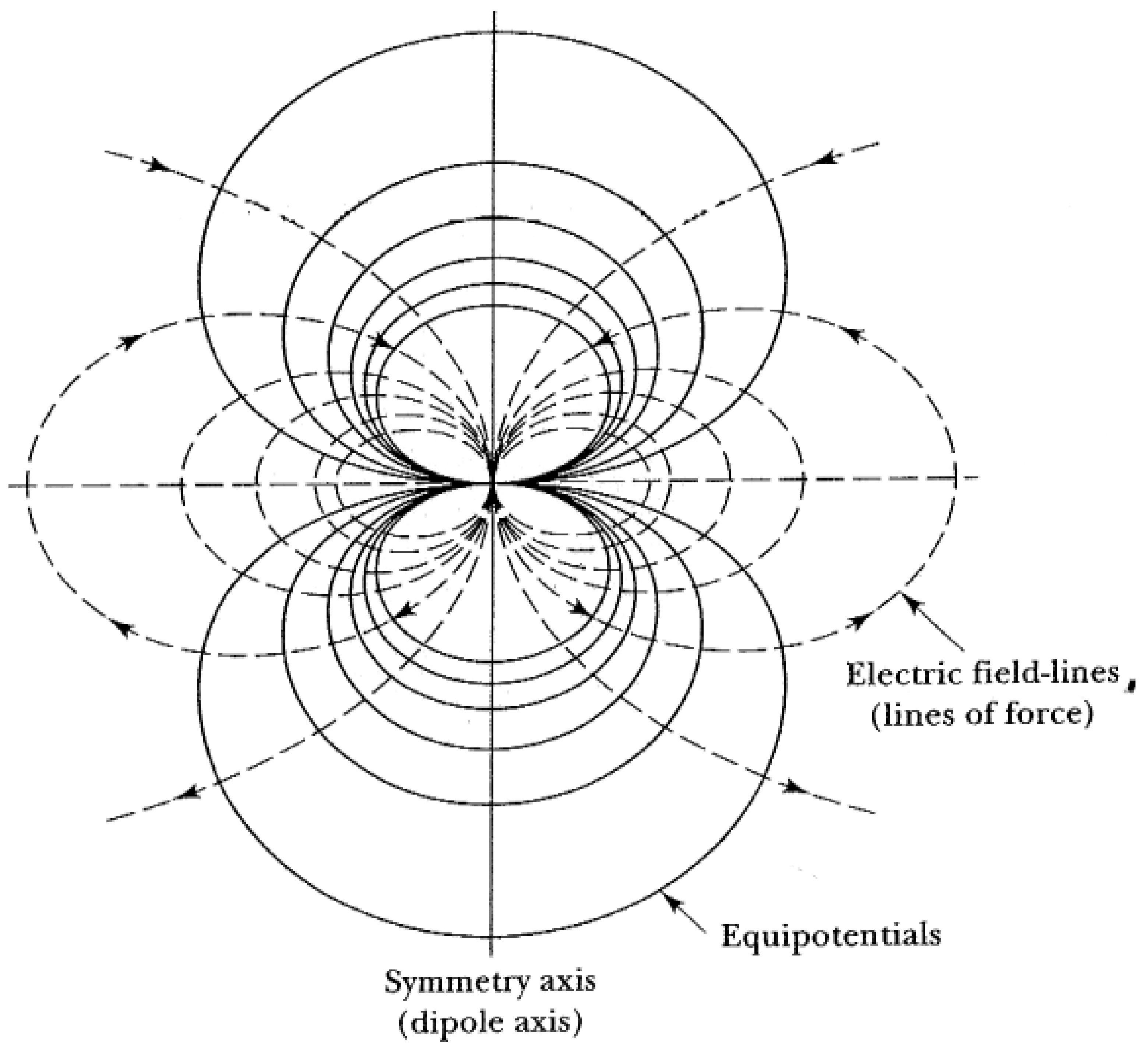


FIGURE 2-2. Dipole equipotentials and field-lines.

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2p\,\frac{\cos\theta}{r^3} \\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = p\,\frac{\sin\theta}{r^3} \\
E_\varphi &= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0
\end{aligned}\right\}$$