b) Trennung der Variablen: allgemein

Für bestimmte symmetrische Probleme kann man die Lösung der Laplacegleichung als Produkt von Funktionen

$$\varphi(x,y,z) = f(q_1)\, g(q_2)\, h(q_3)$$

schreiben, wobei q_1, q_2 und q_3 krummlinige Koordinaten sind, die die Symmetrie des Problems widerspiegeln. Da jede der Funktionen nur von einer Variablen abhängt ergeben sich dann gewöhnliche anstatt partielle Differentialgleichungen, und damit eine signifikante Vereinfachung des Problems. Dies nennt man die Methode der Trennung von Variablen. Falls eine oder mehrere der krummlinigen Koordinaten einen beschränkten Definitionsbereich haben (z.B. $0 \leq \phi \leq 2\pi$ für den Azimutwinkel), oder falls die Randbedingungen des Problems einen endlichen Definitionsbereich erzwingen, dann findet man im allgemeinen, daß die Lösung als eine Summe von Eigenfunktionen der Differentialgleichung zu dieser Koordinate dargestellt werden kann.

Man kann nicht alle Probleme durch Trennung der Variablen lösen. Für den Laplaceoperator hat man nur 11 krummlinige Koordinatensysteme gefunden, in denen der Laplace Operator separabel ist.

c) Trennung der Variablen: Laplace Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\underline{\varphi = f(x)\, g(y)\, h(z)} \qquad \underline{\text{ANSATZ}}$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Diese Gleichung kann nur gelten, falls jeder Term konstant ist

$$\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha'^2$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \beta'^2$$

$$\frac{1}{h}\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \gamma'^2$$

wobei $\underline{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0}$. Aus letzterer Relation ist klar, daß die Separationskonstanten α', β' und γ' nicht alle reell und auch nicht alle imaginär sein können. Falls ~~zwei~~ der Konstanten reell sind, dann muß die dritte imaginär sein und umgekehrt. Falls eine Konstante verschwindet, dann muß eine der verbleibenden Konstanten reell und die andere imaginär sein.

Imaginäre Separationskonstante (z.B. $\alpha' = i\alpha$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\alpha^2 f$$

$$\Rightarrow f \sim e^{i\alpha x} \qquad \text{oszillierende Lösung}$$

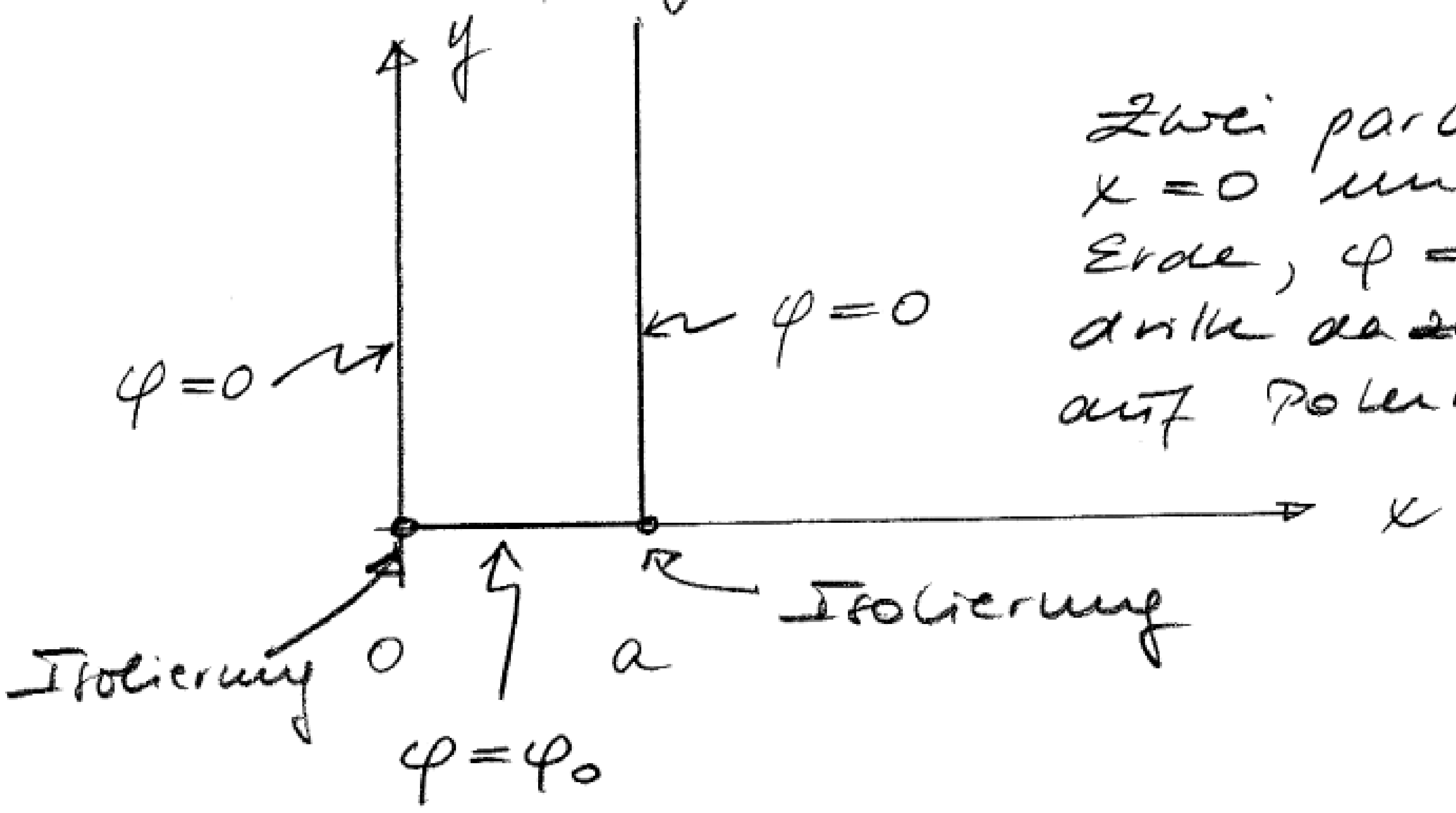
Reelle Separationskonstante (z.B. $\gamma' = \gamma \in \mathbb{R}$)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \gamma^2 h \Rightarrow h \sim e^{\pm \gamma z}$$

exponentielle Lösung

Welche der Separationsvariablen reell oder imaginär ist hängt vom jeweiligen Randwertproblem ab.

Betrachte folgendes konkretes Beispiel



Zwei parallele Ebenen bei $x = 0$ und $x = a$ auf Erde, $\varphi = 0$, und eine dritte dazu senkrechte Ebene auf Potential $\varphi = \varphi_0$

h = constant wegen Symmetrie, d.h. $\gamma' = 0$

x Dimension eingeschränkt auf $[0, a]$

y Dimension — " — auf $[0, \infty]$

Brauchen oszillierende Lösung in x und exponentiell abfallende Lösung in y

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = f(x)\, g(y)$$

$$f(x) \sim \cos(\lambda_k x),\ \sin(\lambda_k x)$$

$$g(y) \sim e^{-\beta y}$$

Weil $f(0) = 0$ nur sin-Lösung möglich

Bedingungen: (1) $\lambda_k^2 = \beta^2$

(2) $\lambda_k a = k\pi$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\alpha_k x)\, e^{-\alpha_k y}$$

Bestimme A_k aus der Randbedingung

$$\varphi(x,0) = \varphi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\alpha_k x)$$

A_k sind also die Fourierkoeff. der Funktion $\varphi_0(x)$

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{2}{a}\varphi_0 \frac{a}{k\pi} 2 = \frac{4}{\pi}\varphi_0 \cdot \frac{1}{k} \; ; \; k = 1, 3, 5, \ldots$$

$\varphi_0 =$ konstant

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \frac{4}{\pi}\varphi_0 \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} e^{-k\pi y/a} \sin\frac{k\pi x}{a}$$

ist die Lösung des Randwertproblems.

Ähnlich gearteten Probleme mit kubischer Symmetrie können analog gelöst werden.

d) Feld eines geladenen Rotationsellipsoids

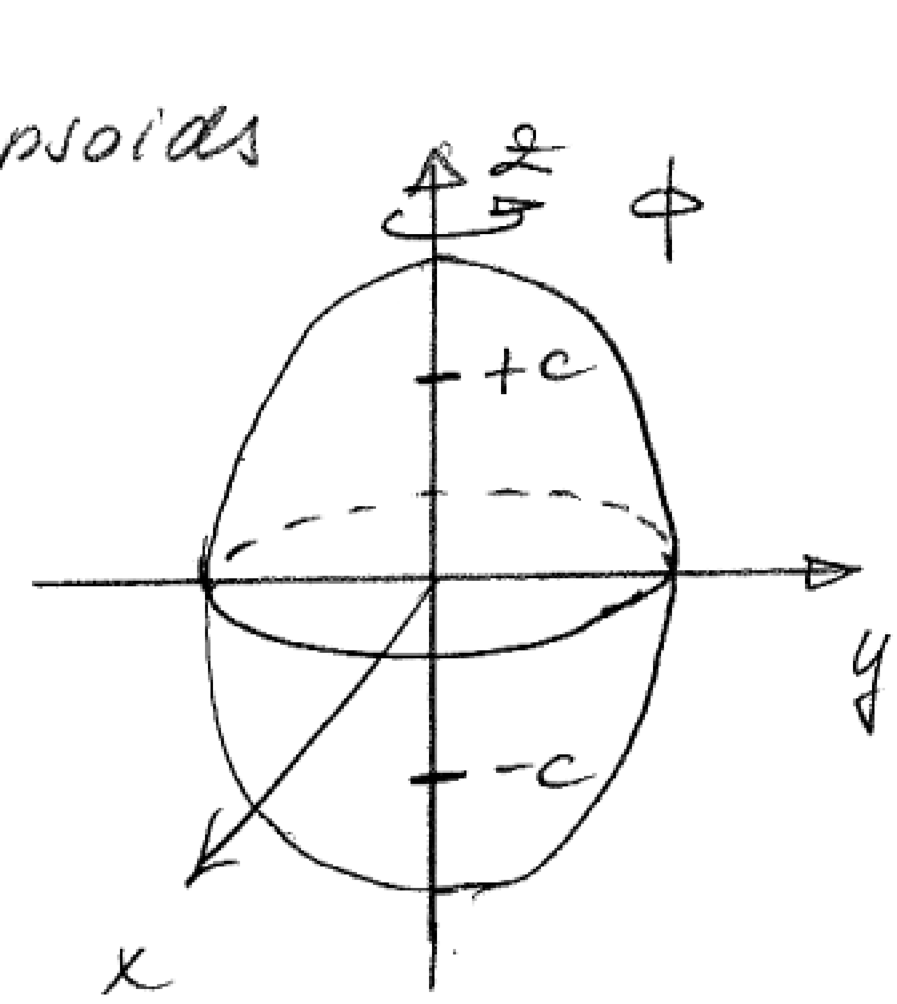
Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

prolate Form $a > b$

Zylinderkoordinaten:

(r, z, ϕ)



(i) Wahl geeigneter Koordinaten

Die Brennpunkte des Rotationsellipsoids liegen bei $z^2 = c^2 = a^2 - b^2$. Suche nun nach einer Schar von Flächen, die konfokal sind, d.h. alle die gleichen Brennpunkte $\pm c$ haben:

$$(*) \qquad \frac{z^2}{c^2\eta^2} + \frac{r^2}{c^2(\eta^2-1)} = 1$$

beschreibt diese gesuchten Flächen mit η als Scharparameter

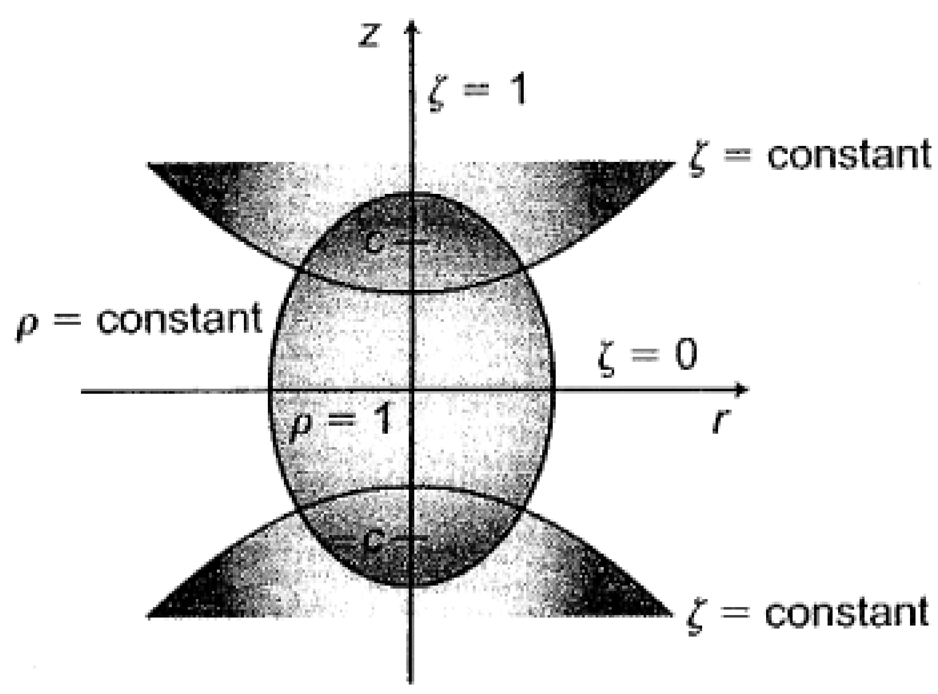
Gegeben das Wertepaar (r, z) hat $(*)$ als eine quadratische Gleichung für η^2 gelesen 2 Lösungen, die wir als ρ^2 und ξ^2 bezeichnen; man nennt sie elliptische Koordinaten (ρ, ξ) zum Punkt (r, z)

- Für $1 < \rho = \eta < \infty$ sind beide Terme in $(*)$ positiv $\rightarrow$ Flächen mit ρ = konstant sind Rotationsellipsoide konfokal mit dem gegebenen Rotationsellipsoid, welches $\rho = \frac{a}{c}$ entspricht.

– Für $-1 < \xi = \eta < 1$ ist der erste Term in (*) positiv und der zweite Term negativ, so daß die Flächen ξ = konstant Rotationshyperboloiden entsprechen, die ebenfalls konfokal sind mit Foki $\pm c$ (→ siehe Figur)

– Die dritte Koordinate ist durch den Azimut-winkel φ um die z-Achse gegeben; die entsprechenden Koordinatenflächen sind Ebenen durch die z-Achse.

Diese drei Familien von Koordinatenflächen sind an jedem Raumpunkt zueinander orthogonal.



Zusammenhang zwischen (r, z) und (ρ, ξ):
Dazu lösen wir die quadratische Gleichung für η^2 geschickt auf

$$\left(\frac{z^2}{c^2\eta^2} + \frac{r^2}{c^2(-1+\eta^2)} - 1\right)\eta^2(\eta^2-1)$$

$$= -(\eta^2-\rho^2)(\eta^2-\xi^2) = 0 \quad \text{für } \eta^2 = \begin{matrix}\rho^2\\ \xi^2\end{matrix}$$

da ρ^2 und ξ^2 Wurzeln sind und der Koeffizient von η^4 gleich (-1) ist.

Setze $\eta^2 = 0$ und $\eta^2 = 1$

$$\boxed{\begin{aligned} z &= c\rho\xi \\ r &= c\sqrt{(\rho^2-1)(1-\xi^2)} \end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen elliptischen und zylindrischen Koordinaten:
$(\rho, \xi) \to (r, z)$

Dann ist

$$x = r\cos\phi = c\sqrt{(\rho^2-1)(1-\xi^2)}\,\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi = c\sqrt{(\rho^2-1)(1-\xi^2)}\,\sin\phi$$

Bemerkung: Es gilt dann für Polarkoord.

$$r^2+z^2 = c^2(\rho^2+\xi^2-1) \xrightarrow{\rho\to\infty} c^2\rho^2$$
$$\cos^2\theta = \frac{z^2}{z^2+r^2} = \frac{\rho^2\xi^2}{\rho^2+\xi^2-1} \xrightarrow{\rho\to\infty} \xi^2$$

Die elliptischen Koordinaten $(\rho c, \xi, \phi)$ sind daher für große Abstände vom Ursprung gleich den sphärischen Koordinaten $(R, \cos\theta, \phi)$.

(ii) Lösung der Laplacegleichung

Transformieren Laplacegl. auf ellipt. Koordinaten (siehe Nebenrechnung)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho^2-1)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right] + \frac{\rho^2-\xi^2}{(\rho^2-1)(1-\xi^2)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0.}$$

Für Probleme mit <u>azimuthaler Symmetrie</u>, wie sie für das gegebene Problem auch vorliegt, ist φ unabhängig vom Azimutwinkel ϕ.

Dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\rho^2-1)\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right] + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right] = 0}$$

wofür wir den Separationsansatz

$$\boxed{\varphi(\rho, \xi) = R(\rho)\, Z(\xi)}$$

machen können. Dann müssen die Fktn R und Z den folgenden gewöhnlichen Dgln. genügen (Legendre-Gleichungen)

$$\boxed{\begin{aligned} &(1.) \quad \frac{d}{d\rho}\left[(1-\rho^2)\frac{dR}{d\rho}\right] + l(l+1) R = 0, \quad 1 \leq \rho < \infty \\ &(2) \quad \frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dZ}{d\xi}\right] + l(l+1) Z = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \end{aligned}}$$

wobei wir die Separationskonstante zu $l(l+1)$ gewählt haben; Grund für Wahl wird später klar.

- (2) = Legendre Gleichung; gehört zur allgemeinen Klasse der Sturm-Liouville Probleme.
- Die Endpunkte $\xi = \pm 1$, wo der Koeffizient $(1-\xi^2)$ verschwindet, heissen singuläre Punkte. Falls die Lösungen von (2) divergieren, dann nur an diesen Punkten.
- Da die Legendre Gleichung zweiter Ordnung ist, hat sie für jedes l zwei linear unabhängige Lösungen. Wir nennen diese

  $P_l(\xi)$ und $Q_l(\xi)$

Für ganzzahlige l, wählt man $P_l(\xi)$ als die Lösung, die an den Endpunkten $\xi = \pm 1$ regulär ist; $Q_l(\xi)$ ist dann die Lösung, die an diesen Punkten divergiert.

Potenzreihenansatz:

$$\boxed{Z(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m}$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big[(m+2)(m+1) a_{m+2} + \big(l(l+1) - m(m+1) \big) a_m \Big] \xi^m = 0$$

Damit dies für alle $-1 \leq \xi \leq 1$ gilt, muß jeder Term verschwinden. Dies führt auf die Rekursionsformel

$$\boxed{(m+2)(m+1)\, a_{m+2} = \big(m(m+1) - l(l+1) \big) a_m}$$

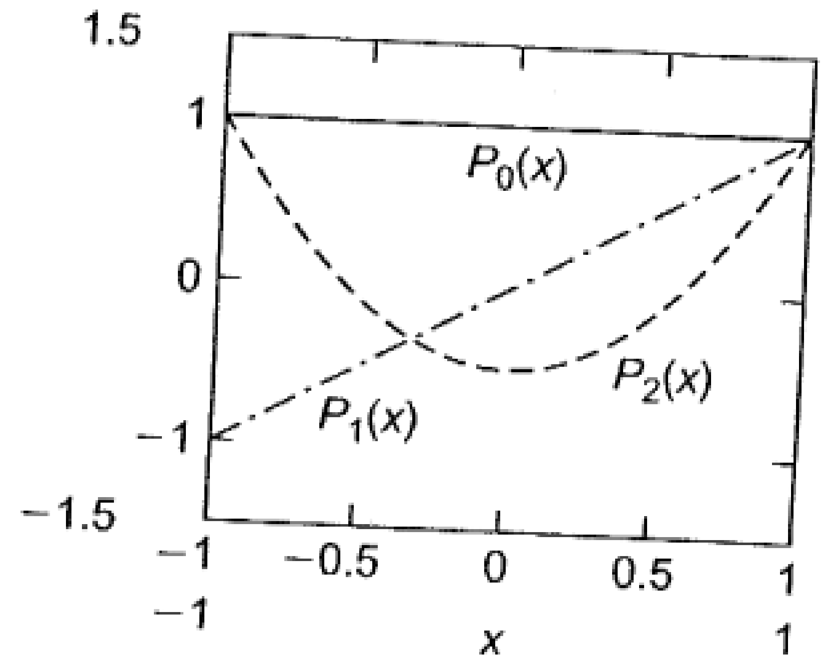
Wir können daher Lösungen konstruieren, indem wir entweder $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$ wählen. Dann bestehen die Lösungen entweder aus ungeraden ($a_0 = 0$) oder geraden ($a_1 = 0$) Potenzen in ξ.

Eine Wahl entspricht $P_l(\xi)$, die andere Wahl der linear unabh. Lösung $Q_l(\xi)$.
Die Potenzreihe divergiert allerdings an den Punkten $\xi = \pm 1$ wenn die Reihe nicht abbricht:
$\frac{a_{m+2}}{a_m} \to 1$ für $m \to \infty$.

Die Reihe kann nur dann abbrechen, wenn die Separationskonstante $l \in \mathbb{N}$ ist!
Dann bricht die Reihe bei $m = l$ ab.

Wähle die Normierung so, daß $P_\ell(1) = 1$.

$$P_0(\xi) = 1$$
$$P_1(\xi) = \xi$$
$$P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1)$$
$$P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi)$$



allgemein gilt

$$\boxed{P_\ell(\xi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} (\xi^2 - 1)^\ell}$$

(Rodriquez Formel für Legendre Polynome)

Beispiele

(i) $\ell = 2$: Reihe bricht bei $m = 2$ ab

$\curvearrowright a_1 = 0, \quad a_0 = a \neq 0$

(andere Wahl führt zu keinem Abbruch der Reihe)

$2 \cdot 1\, a_2 = -2 \cdot 3\, a \quad \curvearrowright a_2 = -3a$

$\curvearrowright P_2 = -a(3\xi^2 - 1)$

mit $P_2(1) = 1$ folgt $a = -1/2$.

(ii) $\ell = 3$: Reihe bricht ab bei $m = 3$

$\curvearrowright a_0 = 0, \quad a_1 = a$

$$3 \cdot 2\, a_3 = (2 - 3 \cdot 4)\, a$$
$$6\, a_3 = -10\, a$$

$$P_3(\xi) = -a\left(\frac{10}{6}\xi^3 - 1\right)$$
$$P_3(1) = -a\left(\frac{10}{6} - 1\right) = -\frac{4}{6}a \Rightarrow a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3).$$

Beweis der Rodriguez Formel

Definiere $\tilde{z}(\xi) := k(\xi^2-1)^l$

mit k einer Konstante

Dann gilt

$$(1-\xi^2)\frac{d\tilde{z}}{d\xi} + 2l\xi\tilde{z} = 0$$

Differenziert man diesen Ausdruck $(l+1)$ fach so findet man

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d^{l+1}\tilde{z}}{d\xi^{l+1}}\right] + l(l+1)\frac{d^l\tilde{z}}{d\xi^l} = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{d^l\tilde{z}}{d\xi^l}$ ist Lösung der Legendre Gleichung

Wähle $k = \frac{1}{2^l l!}$ so daß $P_l(1) = 1$.