4.8. Wellenpakete

Der spezifische Zusammenhang zwischen ω und k bestimmt $v = \frac{\omega}{k}$, die Phasengeschw. einer Welle. In einem nicht dispersiven Medium ist $\omega(k) \sim k$ so dass alle Wellen sich mit der gleichen Phasengeschwindigkeit fortbewegen. Im Gegensatz hierzu, propagiert in einem dispersiven Medium jede Welle mit einer Geschwindigkeit, die von der Frequenz abhängt.

Wir beschränken uns in der Diskussion auf den 1D Fall*), und betrachten eine Überlagerung von harmonischen Wellen mit der Dispersion $\omega(k)$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \hat{\phi}(k,t) \\ \hat{\phi}(k,t) &= a(k)\, e^{-i\omega(k)t} \end{aligned}}$$

$\rho(x,t) := |\phi(x,t)|^2$ heisst die Dichte des Feldes, und

$\rho(k) := \frac{1}{2\pi} |a(k)|^2$ die Dichte der Wellenzahl k.

Häufig ist $\rho(k)$ stark um einen bestimmten Wert k_p zentriert („gepeakt").

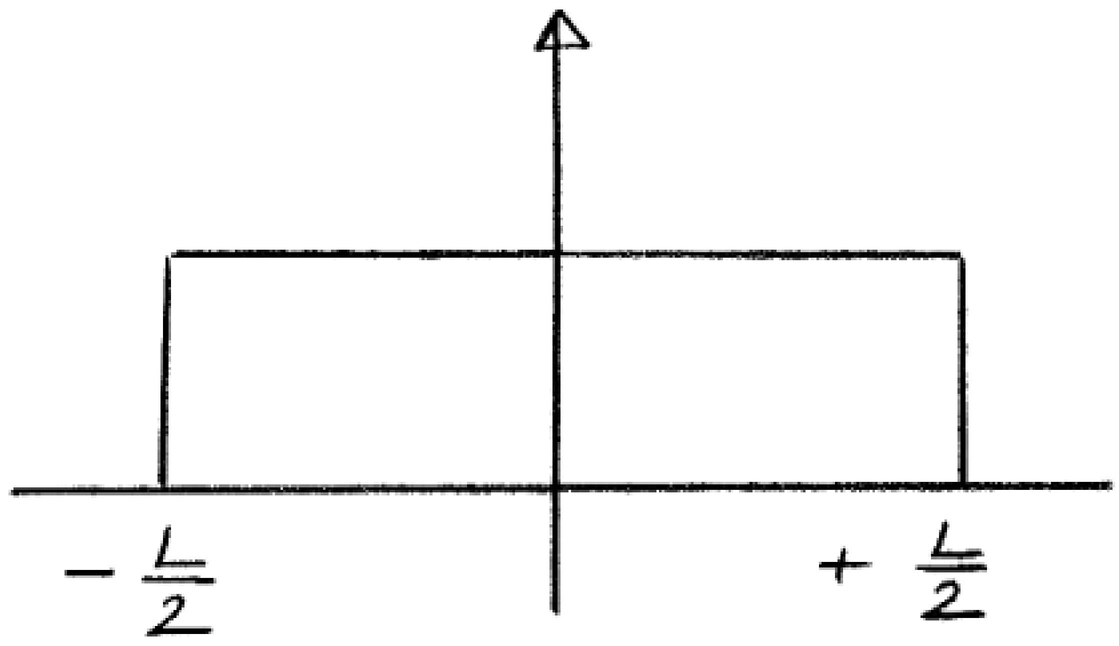
---

*) Die Verallgemeinerung auf 3D ist trivial

Beispiele:

(a) Rechteckpuls

$$\phi(x) = \begin{cases} A \; ; & |x| < \frac{L}{2} \\ 0 \; ; & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



(Anfangsform des Pulses / Wellenpakets)

$$a(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \phi(x) \, e^{ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \phi(x) \cos(kx)$$

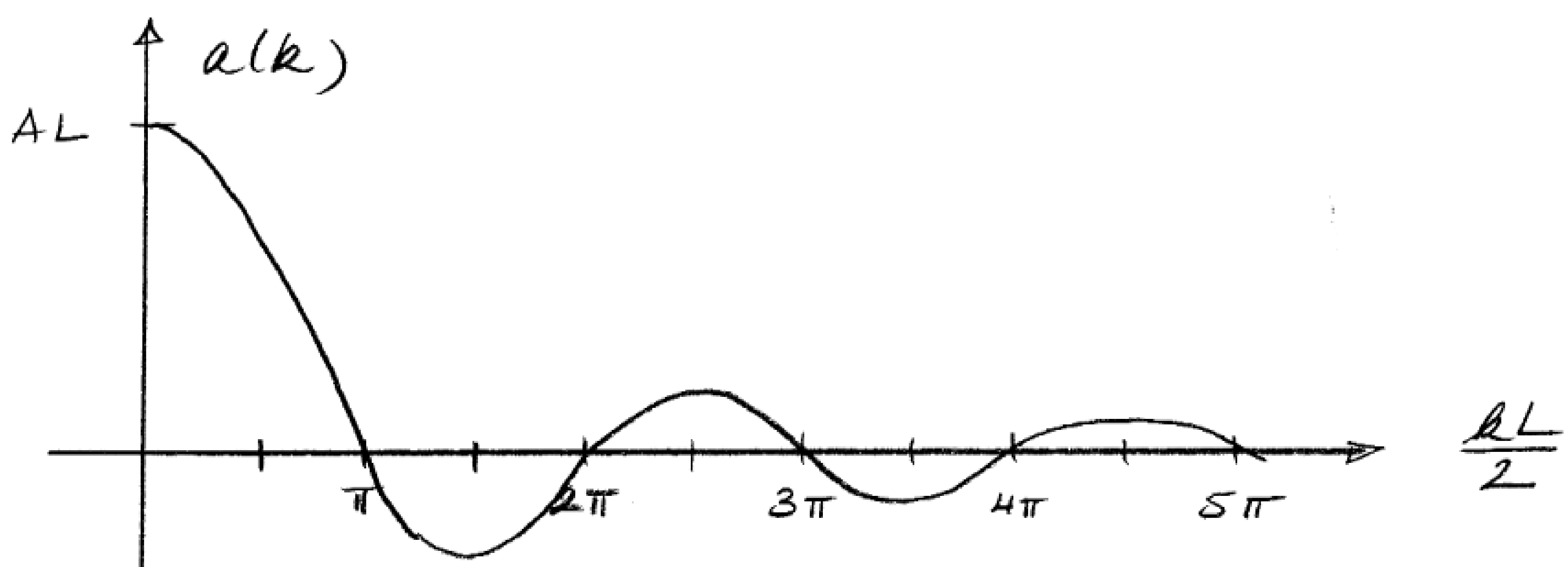
da $\phi(x)$ eine gerade Funktion

$$= A \int_{-L/2}^{+L/2} dx \cos(kx) = \frac{A}{k} \sin(kx) \Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \frac{A}{k} \left(\sin\left(\frac{kL}{2}\right) - \sin\left(-\frac{kL}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2A}{k} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = A \cdot L \, \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{\frac{kL}{2}}$$

$$\equiv A L \operatorname{sinc} \frac{kL}{2} \quad ; \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$



$$\Delta k = \frac{4\pi}{L} \quad \text{(Breite des zentralen peaks)}$$

$$\Delta k \cdot L \sim 1$$

Breite Puls × Breite Spektrum ~ 1 !

(b) "Gauß'sche" Frequenzkämme → Folie

Beginne mit einer Sinuswelle mit Wellenzahl k_p, die wir als Träger (oder Peak) Frequenz bezeichnen → (a)

Addiere symmetrisch um k_p zwei weitere (räumliche) Frequenzen. Die zentrale (mittlere) Frequenz bleibt unverändert. Es entstehen Schwebungen (Modulationen der Trägerwelle). → (b)

Fügt man nun weitere Paare von Sinuswellen dazu führt dies zu einem größeren Abstand zwischen den Pulsen ohne die Form merklich zu verändern → (c), (d)

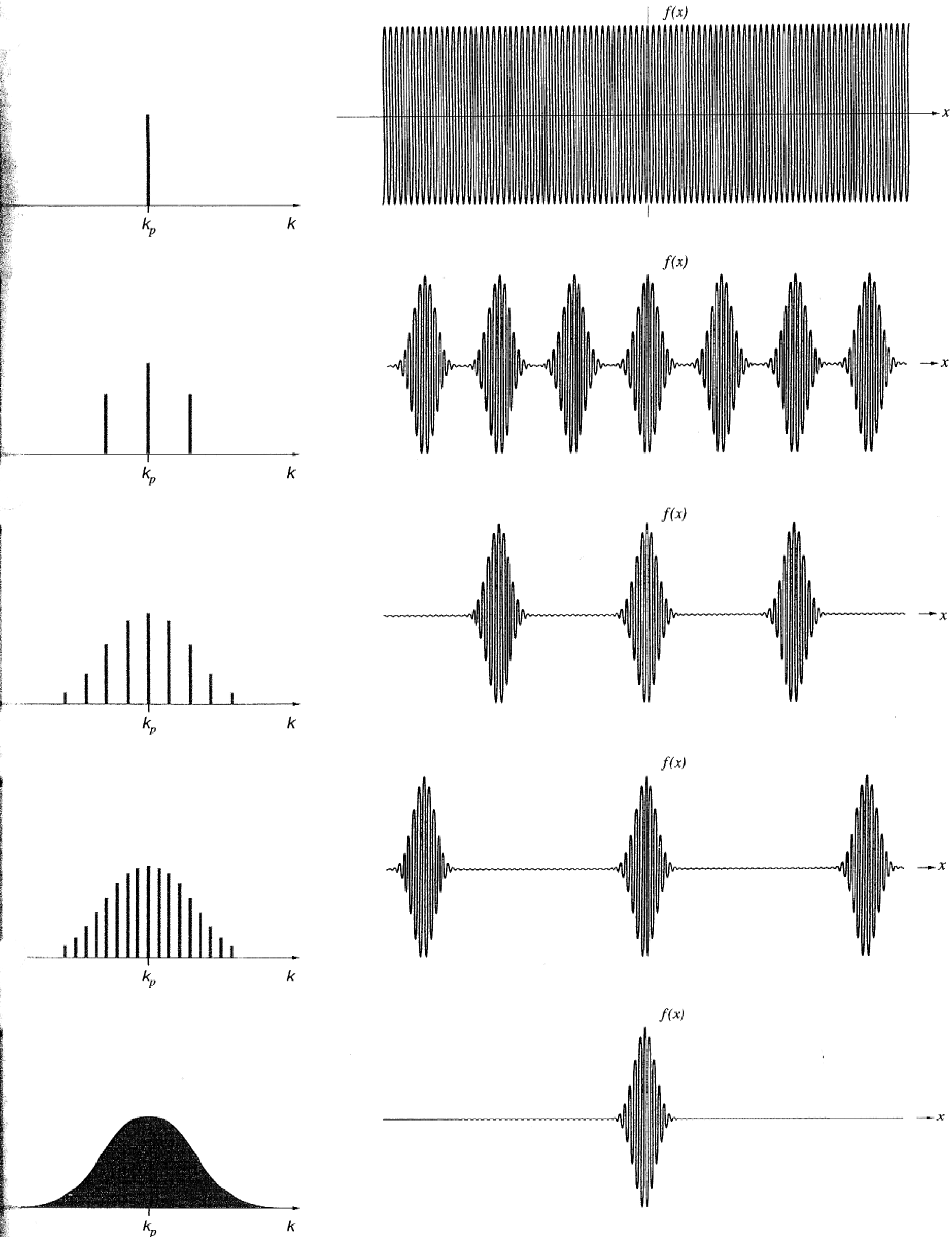
Im Kontinuumlimes erhält man eine Gaußverteilung → (e)

$$a(k) = \exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_p)^2\sigma^2\right]$$

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx} \exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_p)^2\sigma^2\right] \\
&\underset{\tilde{k}=k-k_p}{=} \int \frac{d\tilde{k}}{2\pi} \exp\left[i(\tilde{k}+k_p)x - \frac{1}{2}\tilde{k}^2\sigma^2\right] \\
&= e^{ik_p x} \int \frac{d\tilde{k}}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\tilde{k}\sigma - i\frac{x}{\sigma}\right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
&= e^{ik_p x}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\
&= e^{ik_p x}\, \phi_\sigma(x)
\end{aligned}$$

TRÄGERWELLE ↑ Einhüllende = Gaußfunktion

Gaußintegral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$


f(x)
x
k_p
k
f(x)
x
k_p
k
f(x)
x
k_p
k
f(x)
x
k_p
k
f(x)
x
k_p
k

Zur Charakterisierung der Wellenpakete führen wir die folgenden Größen ein *)

Mittlere Position, Wellenzentrum

$$R(t) := \langle x(t) \rangle = \int dx\, \rho(x,t)\, x$$

Mittlerer quadratischer Radius

$$\sigma^2(t) := \langle (x(t) - R(t))^2 \rangle$$
$$= \int dx\, \rho(x,t)\, (x - R(t))^2$$

Wir untersuchen zunächst die mittlere Position

$$R(t) = \int dx\, \varphi^*(x,t) \left(x\, \varphi(x,t) \right)$$
$$\underset{\text{Parseval}}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\, \hat{\varphi}^*(k,t) \left(i \partial_k \hat{\varphi}(k,t) \right)$$
$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, a^*(k)\, e^{+i\omega(k)t} \left(i \partial_k\, a(k) e^{-i\omega(k)t} \right)$$
$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, a^*(k) \left(t\, \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}\, a(k) + i \frac{\partial a(k)}{\partial k} \right)$$
$$= \underbrace{t \int dk\, \rho(k)\, \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}}_{\left\langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right\rangle} + \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi}\, a(k)\, i\, \partial_k\, a(k)}_{= R_0 \text{ zeitunabh. Konstante}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle R(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right\rangle$$

---

*) Wir wählen die Normierung so daß $\int \rho(x,t)\, dx = 1$. Dann ist aufgrund der Parseval Gleichung auch $\int dk\, \rho(k) = 1$.

Wir folgern also, daß die Geschwindigkeit der Wellenmittelpunkte sich als der Mittelwert der Gruppengeschwindigkeit ergibt

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$$

Mit $v_{phase} = \frac{\omega}{k}$ ist

$$v_g(k) = \partial_k (v_{phase} \cdot k)$$

$$= v_{phase} - \lambda \frac{\partial v_{phase}}{\partial \lambda}$$

wobei λ = Wellenlänge

In der Optik durchsichtiger Medien ist $\omega(k) = ck / n(\omega)$ (mit reellem $n(\omega)$) und man erhält dafür sofort *)

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

---

*) $$\frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{ck}{\omega}\right) = \frac{\omega c \frac{dk}{d\omega} - ck \frac{d\omega}{d\omega}}{\omega^2}$$

$$= \frac{\cancel{\omega} c / v_g - \cancel{\omega} \cdot n(\omega)}{\omega^{\cancel{2}}}$$

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = c / v_g - n(\omega)$$

$$\frac{c}{v_g} = \omega \frac{dn}{d\omega} + n(\omega)$$

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

Für normale Dispersion ist $\frac{dn}{d\omega} > 0$ und $n > 1$. Dann gilt

$$v_g < v_{phase} < c$$

Für anomale Dispersion kann $\frac{dn}{d\omega}$ sehr negativ werden. Dann ist v_g sehr verschieden von v_{phase} und $v_g > c$ ist möglich.

Falls $\rho(k)$ stark um einen Wert $\bar{k}$ zentriert ist, dann gilt für die Geschw. des Wellenpakets

$$v = \left\langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right\rangle = \frac{\partial \omega}{\partial k}\bigg|_{\bar{k}} = v_g(\bar{k})$$

d.h. sie ist identisch zur Gruppengeschwindigkeit am Maximum des Spektrums.

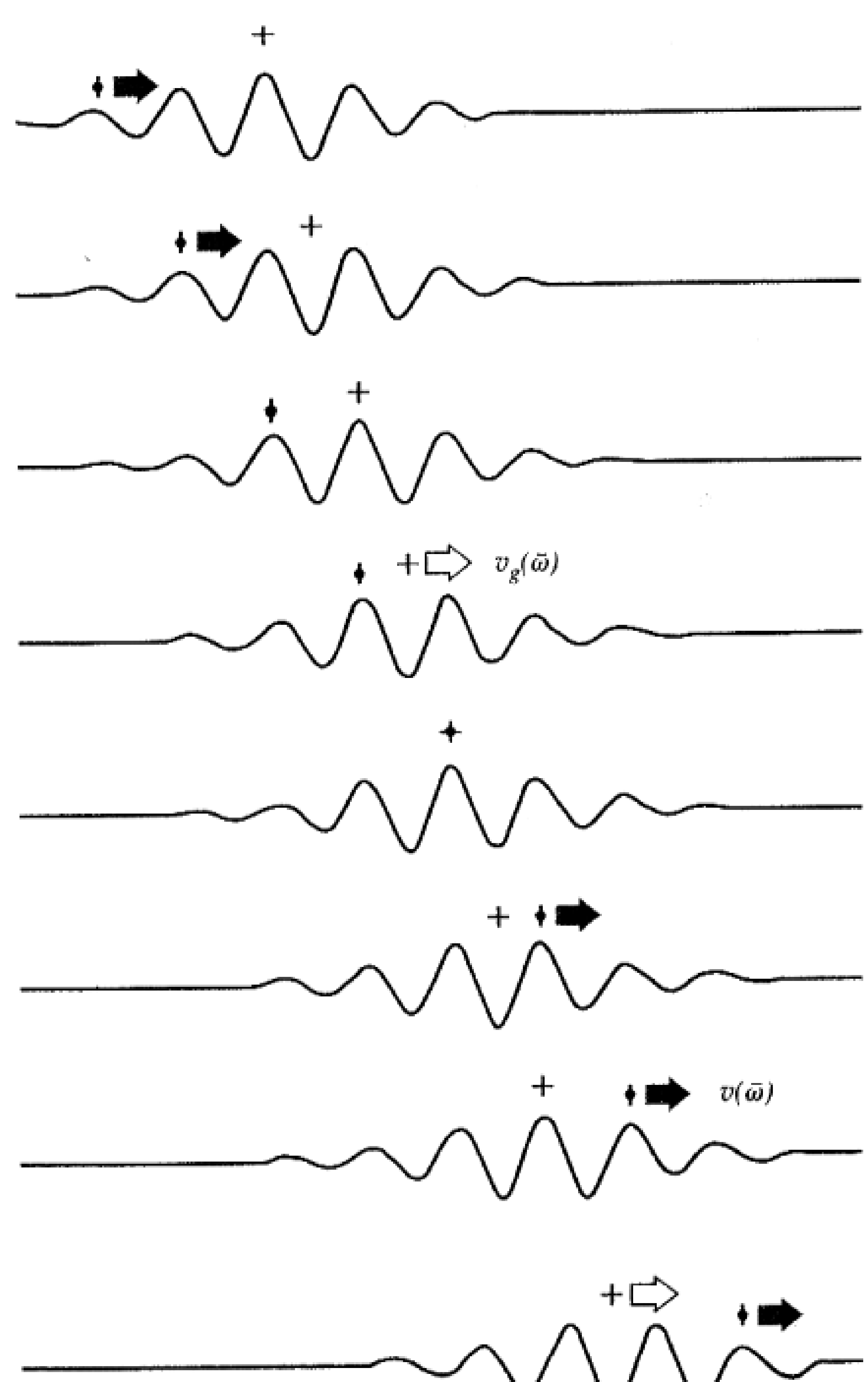


Figure 7.18 A wave pulse in a dispersive medium.

Fig 7.18 aus Hecht

Wir untersuchen nun weiter die Breite des Wellenpakets

$$\underline{\sigma^2(t)} = \int dx\, \rho(x,t)\, (x - R(t))^2$$

$$= \int dx\, \rho(x,t)\, \left(x^2 - 2x\, R(t) + R^2(t)\right)$$

$$= \int dx\, \rho(x,t)\, x^2 - R^2(t)$$

$$= \underline{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}$$

Wir berechnen nun weiter das 2te Moment

$$\langle x^2(t)\rangle = \int dx\, \rho(x,t)\, x^2$$

$$= \int dx\, \underbrace{\left(\phi^*(x,t)\, x\right)}_{= g^*}\, \underbrace{\left(\phi(x,t)\, x\right)}_{= g}$$

$$\overset{\text{Parseval}}{=} \int \frac{dk}{2\pi}\, \left(i \partial_k \hat{\phi}(k,t)\right)^* \left(i \partial_k \phi(k,t)\right)$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi}\, \left(t \frac{\partial \omega}{\partial k} a^* - i \frac{\partial a^*}{\partial k}\right) \left(t \frac{\partial \omega}{\partial k} a + i \frac{\partial a}{\partial k}\right)$$

$$= t^2 \left(\int dk\, \rho(k) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 \right) + \alpha t + \beta$$

wobei α und β im folgenden nicht weiter ausgerechnet werden.

Wir betrachten nun weiter

$$\int dk\, \rho(k) \left[t \frac{\partial \omega}{\partial k} - v t \right]^2 =$$

$$= \int dk\, \rho(k) \left[t^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 - 2 v t^2 \frac{\partial \omega}{\partial k} + v^2 t^2 \right]$$

$$= \int dk\, \rho(k)\, t^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)^2 - (v t)^2$$

Folglich haben wir insgesamt

$$\sigma^2(t) = \int dk\, \rho(k) \left[t \frac{\partial \omega}{\partial k} - vt\right]^2 + At + B$$

(A, B nicht weiter ausgerechnet)

Die Varianz hat also die Struktur

$$\sigma^2 = \delta^2 t^2 + At + B \qquad (>0,\ \neq 0)$$

mit $\boxed{\delta^2 = \int dk\, \rho(k) \left[\frac{\partial \omega}{\partial k} - v\right]^2 \geq 0}$

Schreibe nun $\sigma^2 = (\delta t - x_-)(\delta t - x_+)$

wobei $x_\pm$ nicht reell sein können, da sich sonst ein Widerspruch zu $\sigma^2 \neq 0$ ergeben würde

$$x_\pm = x_0 \pm i x_1 \quad ; \quad x_0, x_1 \neq 0$$

$$\sigma^2 = (\delta t - x_0 - i x_1)(\delta t - x_0 + i x_1)$$

$$= (\delta t - x_0)^2 + x_1^2$$

$$= \delta^2 (t - t_0)^2 + x_1^2$$

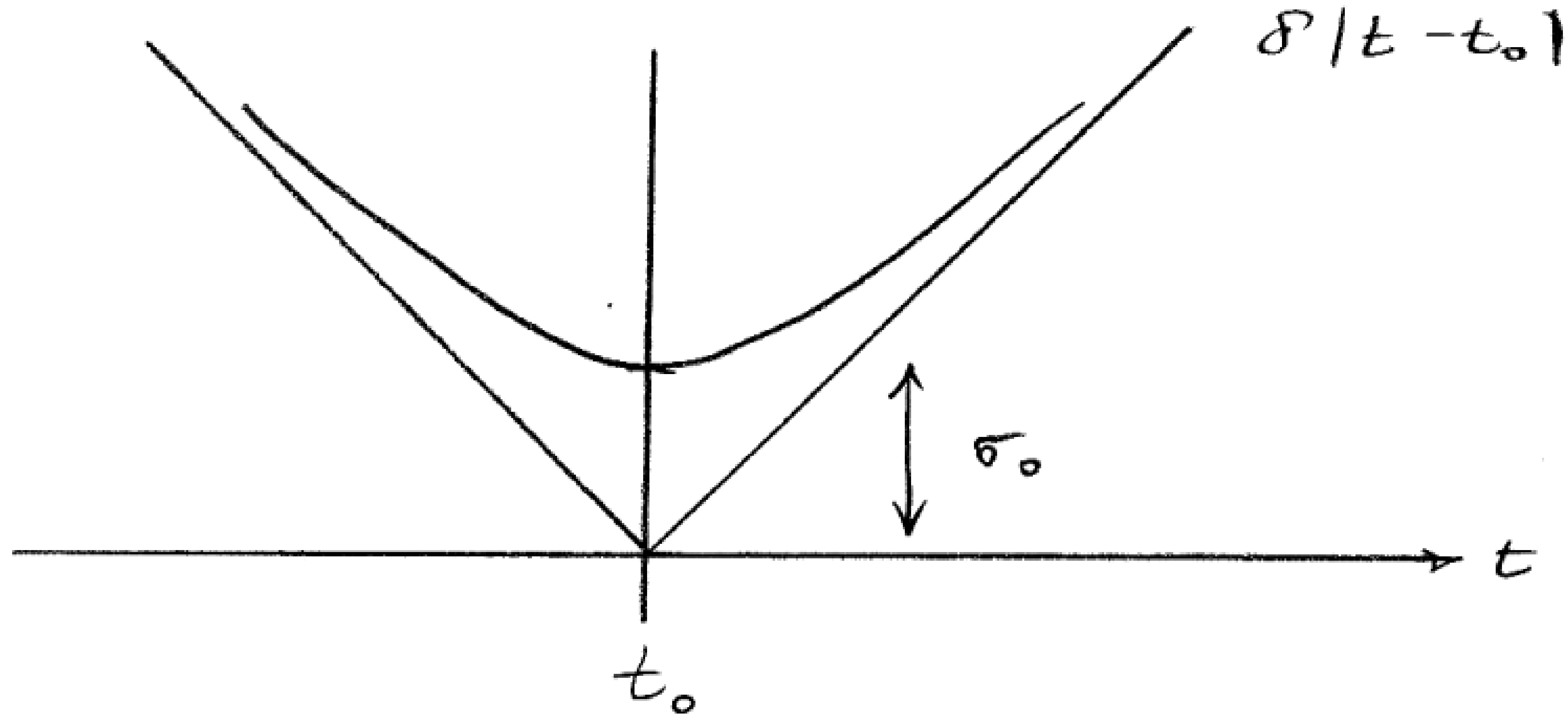
wobei t_0 durch die letzte Zeile definiert ist.

Dann gilt

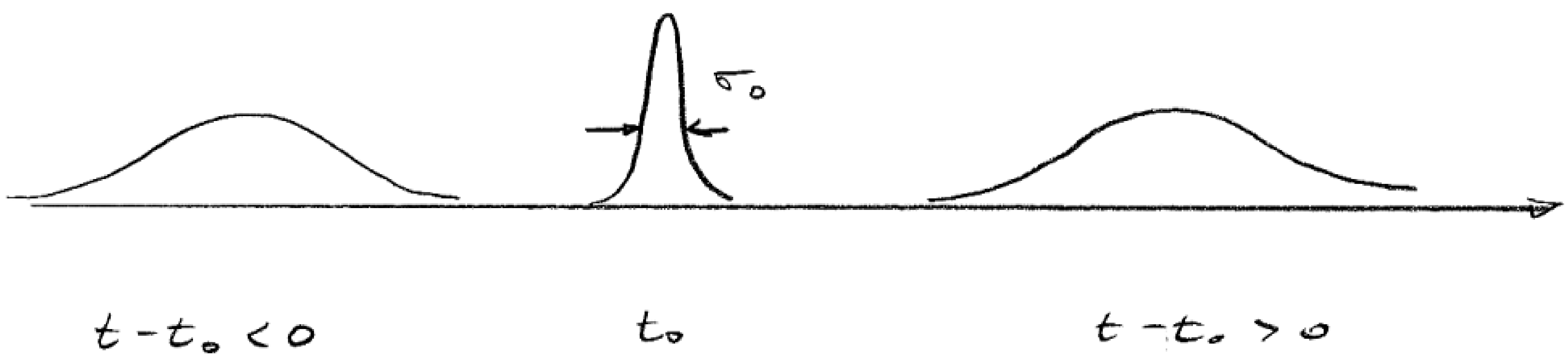
$$\boxed{\sigma^2 = \delta^2 (t - t_0)^2 + \sigma_0^2 \quad , \quad \sigma_0 > 0}$$

Fall $\omega = v k$, dann gilt $\delta = 0$
d.h. für eine lineare Dispersion ergibt sich keine Verbreiterung des Wellenpakets (nicht dispersives Medium).

In allen anderen Fällen ist $\delta > 0$



Für $t \gg t_0$ wächst σ linear in $|t - t_0|$
Für $t \ll t_0$ fällt σ linear in $|t - t_0|$



Für stark zentrierte Spektren gilt

$\omega(k)$ kann in Taylorreihe um $\bar{k}$ entwickelt werden

$$\omega(k) = \bar{\omega} + \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_{\bar{k}} (k-\bar{k}) + \dots$$

$$v = v_g(\bar{k}) + \dots$$

Dann

$$\delta^2 \cong \int dk\, \rho(k) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big|_{\bar{k}} \right)^2 (k-\bar{k})^2$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big|_{\bar{k}} \right)^2 \langle (k-\bar{k})^2 \rangle$$

Übungen: Diskutieren das Gauß'sche Wellenpaket!

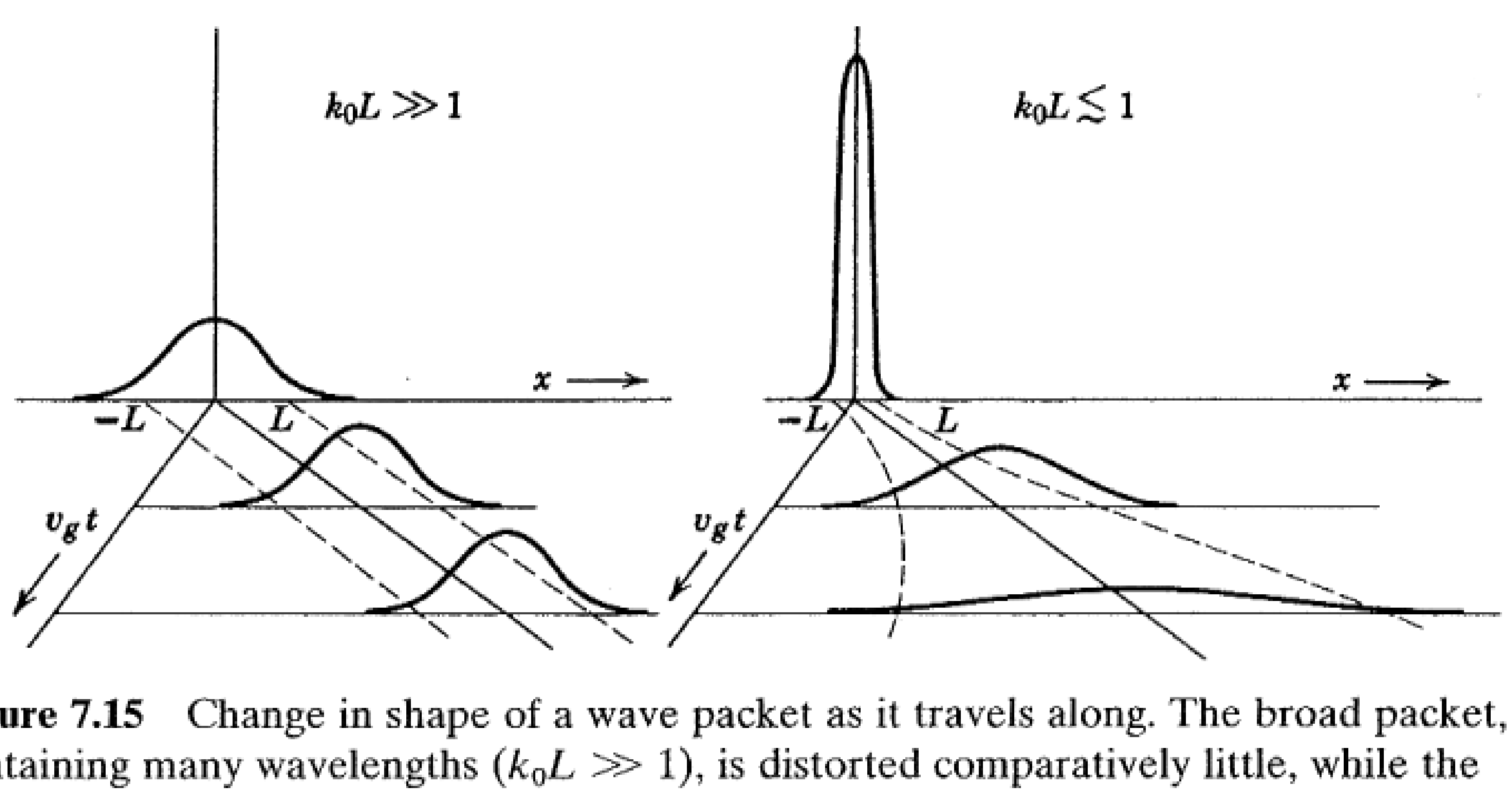


Figure 7.15 Change in shape of a wave packet as it travels along. The broad packet, containing many wavelengths ($k_0L \gg 1$), is distorted comparatively little, while the narrow packet ($k_0L \lesssim 1$) broadens rapidly.