

Uminterpretation des Hochfrequenzverhaltens

Aus der Drude-Formel folgt für hohe Frequenzen $\omega \tau \gg 1$

$$j(\omega) = \underbrace{i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}}_{\sigma(\omega)} E(\omega)$$

Wir schreiben nun $j(\omega)$ nun als

$$j(\omega) = n q v(\omega) = n q (-i\omega) x(\omega)$$

Dann gilt für $P(\omega) = n q x(\omega)$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} \cdot \frac{1}{(-i\omega)} E(\omega) \\ &= - \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega^2} E(\omega) \end{aligned}$$

Dies ist identisch mit dem Hochfrequenzverhalten des Lorentz-Drude-Modells. Bei hohen Frequenzen können wir also die Reaktion des Mediums sowohl als Leitfähigkeit als auch als Suszeptibilität auffassen:

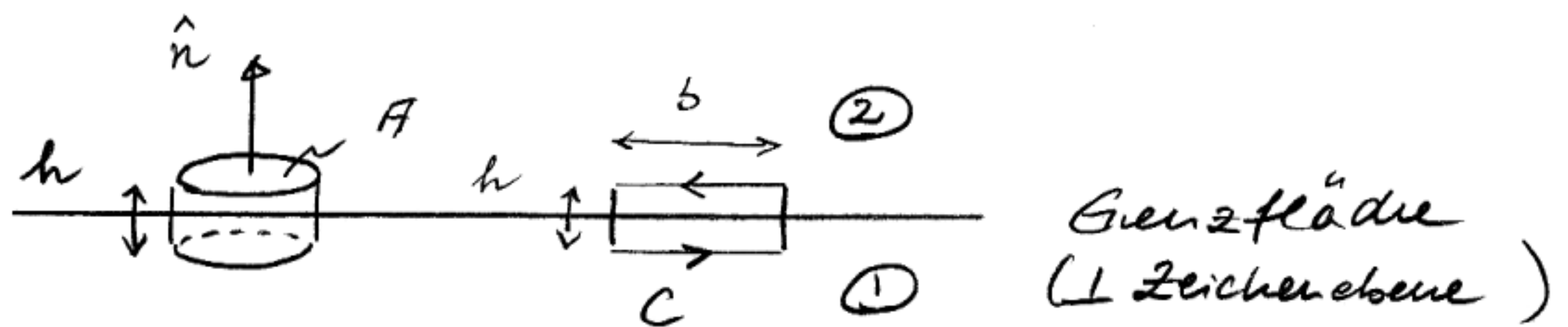
$$\chi(\omega) \leftrightarrow \sigma(\omega) / (-i\omega)$$

3.4. Grenzflächen und Randbedingungen

Wie verhalten sich elektromagnetische Felder beim Übergang zwischen makroskopischen Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften? Häufig ändern sich die Materialeigenschaften auf Längenskalen, die kurz sind im Vergleich zur räumlichen Variation der elem. Felder. Dann lassen sich die Grenzflächen als Unstetigkeitsflächen für die Materialparameter idealisieren.

Wir betrachten zunächst die homogenen Maxwellgleichungen in integraler Form

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{f}$$



Für den magnetischen Fluss durch die „Dose“ mit Deck- und Bodenfläche tangential zur Grenzfläche gilt für $h \rightarrow 0$ und infinitesimale A

$$0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}^{(2)} \cdot \hat{n} A - \vec{B}^{(1)} \cdot \hat{n} \cdot A$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B} \cdot \hat{n} = B_n \text{ stetig}}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Felder \vec{B} ändern sich nicht beim Übergang zwischen Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften. Dies gilt unabhängig davon ob die Grenzfläche eine physikalische oder nur eine gedachte mathematische Grenzfläche ist.

Betrachten wir nun die Zirkulation des \vec{E} -Feldes entlang einer rechteckigen Schleife C (siehe Figur), wieder im Limes $h \rightarrow 0$ und infinitesimaler Breite b :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = (\vec{E}^{(2)} \cdot \hat{t} - \vec{E}^{(1)} \cdot \hat{t}) \cdot b + \mathcal{O}(h) \\ = - \int \vec{B} \cdot d\vec{f} = b \mathcal{O}(h)$$

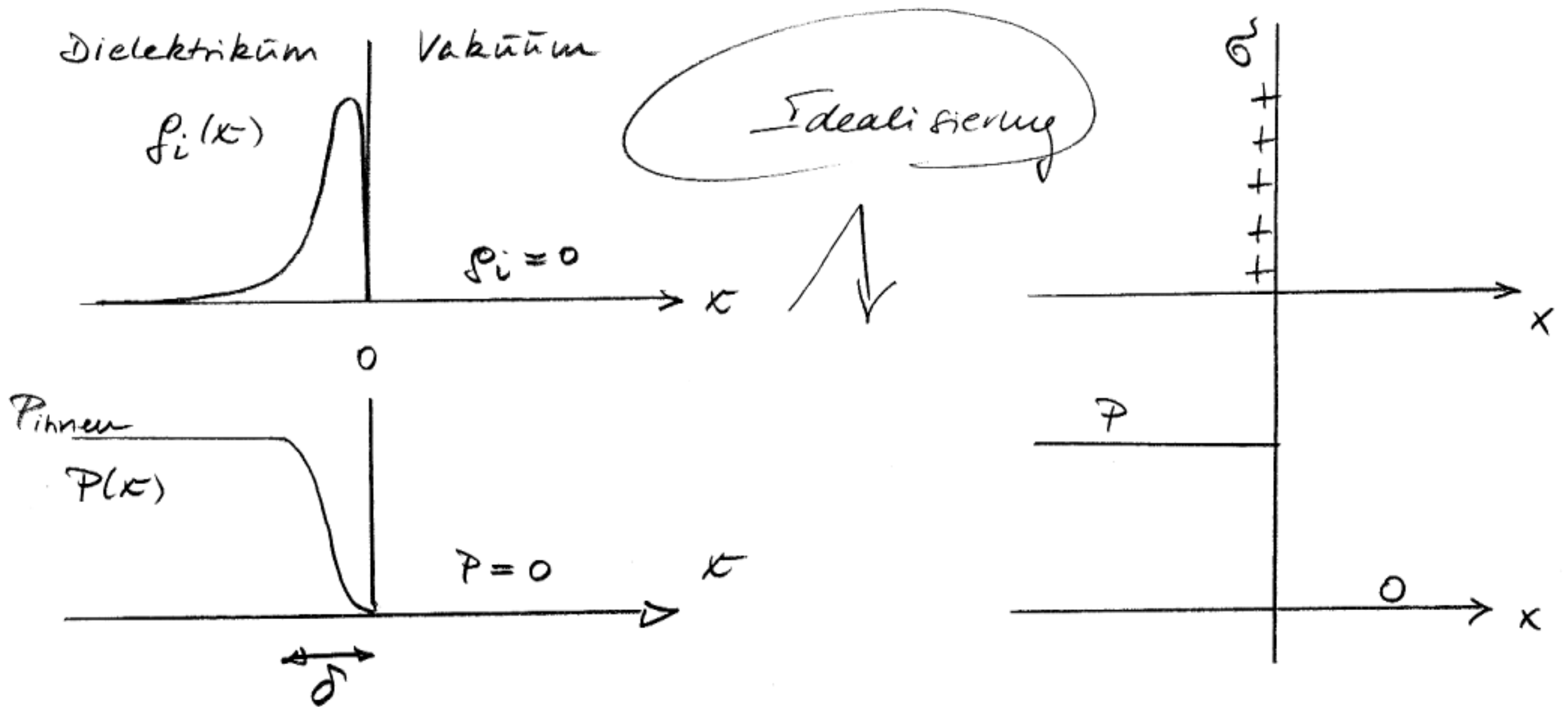
(hier ist \hat{t} ein Tangentialvektor an die Grenzfläche)

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} \cdot \hat{t} = E_t \text{ stetig}}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes \vec{E} ist stetig an physikalischen oder auch mathematischen Grenzflächen.

Als nächstes untersuchen wir die inhomogenen Maxwellgleichungen. Um aus ihnen Folgerungen über das Verhalten von \vec{D} und \vec{H} abzuleiten müssen wir uns zunächst ein Bild von der räumlichen Variation der induzierten (gebundenen) Ladungen und Ströme machen.

Dazu betrachten wir als einfaches Beispiel den Übergang von einem homogenen Dielektrikum zum Vakuum. Dann erwartet man, daß die durch ein äußeres elektrisches Feld induzierte relative Verschiebung zwischen positiven und negativen Ladungen zu einer Oberflächenladung im Dielektrikum führt (\rightarrow Figur).



über $\rho_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x} P(x)$ (Annahme: ebene homogene Grenzfläche) kann man die Polarisation aus der scharf gepeakten induzierten Ladungsdichte berechnen (\rightarrow Figur): $P(x)$ fällt von einem konstanten Wert im Dielektrikum innerhalb einer Randschicht auf den Wert Null ab. Sei nun δ die Dicke dieser Randschicht. Dann

$$\underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta} dx \rho_i(x)}_{= \sigma} = - \underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta} dx \frac{\partial}{\partial x} P(x)}_{= -P_{\text{außen}} + P_{\text{innen}} = 0}$$

Gesamtladung (pro Fläche) in der Randschicht
 = Oberflächenladungsdichte

Sprung in der Polarisation beim Übergang von Dielektrikum ins Vakuum

$$\boxed{P_{\text{innen}} = \Delta P = \sigma}$$

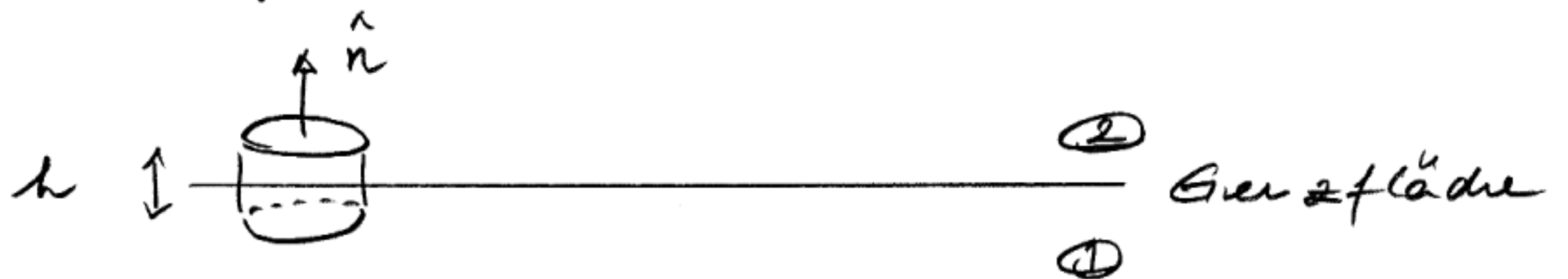
Der Sprung in der Polarisation = Oberflächenladungsdichte.

Idealisierung: $\delta \rightarrow 0$ (\rightarrow Figur)
 (Wiederum gilt, daß diese Idealisierung gültig ist wenn \vec{E}, \vec{D} langsam variieren im Vergleich zu den Materialeigenschaften!)

Betrachte nun das Coulomb'sche Gesetz in integraler Form

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int_{\partial V} \rho_e dV = Q \cdot 4\pi$$

wobei Q die von der Fläche $F = \partial V$ umschlossene Gesamtladung ist.



Es folgt für die "Dose" analog zu unseren früheren Überlegungen:

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi \rho_e \cdot h$$

Falls ρ_e endlich ist, dann gilt im Limes $h \rightarrow 0$

$$\underline{D_n \text{ stetig}}$$

In den meisten praktisch relevanten Fällen ist D numerisch nicht viel größer als $10^5 \frac{eSE}{\text{cm}^2}$, während die Dichte der frei beweglichen Ladungen in Metallen von der Ordnung $10^{13} eSE \text{ cm}^{-3}$, so daß man in vielen Fällen eine extreme Unstetigkeit in D_n über Distanzen von der Ordnung $\lesssim 10^{-10} \text{ m}$ oder 1 \AA hat.

Daher ist es bei der Diskussion von Metallen notwendig

$$\underline{D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi \sigma_e}$$

zu schreiben, wobei σ_e die frei bewegliche Oberflächenladungsdichte ist.

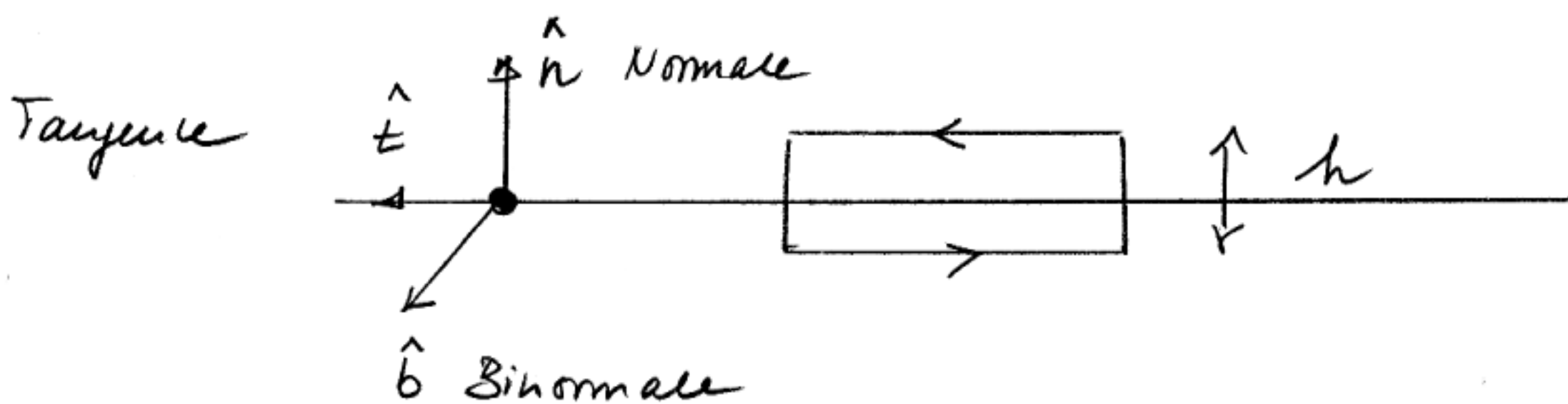
Bemerkung: In Halbleitern ist die bewegliche Ladungsdichte viel geringer als in Metallen, und die Tiefe der Verarmungszone an der Oberfläche kann, wie in Feldeffekttransistoren, makroskopische Dimensionen annehmen. Es ist dann nicht mehr gerechtfertigt von einer Oberflächenladungsdichte zu sprechen.

Als nächstes untersuchen wir das Ampere-Maxwell Gesetz für makroskopische Medien:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{c} \int \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{l}$$

Rechteckige Schleife $d\vec{l} = dl \cdot \vec{b} = dl (\hat{n} \times \hat{t})$

$$\sim H_t^{(2)} - H_t^{(1)} = \left(\frac{4\pi}{c} j_b + \frac{1}{c} \partial_t D_b \right) \cdot h$$



bei \dot{D}_b nicht singular ist führt dies im Limes $h \rightarrow 0$ auf

H_t stetig

falls \vec{j} ebenfalls nicht singular ist.

Nebenrechnung: $\vec{j} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = \vec{j} \cdot \vec{b} = j_b$
 Strom \perp Schleife, in der
 Tangentialebene

In statischen Problemen kann der Strom \vec{j} in Supraleitern von Null verschieden sein. Dann kann sich der Strom auch in makroskopisch kleinen Oberflächenschichten beträchtlich ändern, so daß es sinnvoll ist einen Oberflächenstrom \vec{I}_b einzuführen:

$$\vec{H}_z^{(2)} - \vec{H}_z^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \vec{I}_b.$$

Bei hoher Frequenz sind die Ströme an der Oberfläche von Metallen (siehe später) auf eine kleine Oberflächenschicht beschränkt (\rightarrow Skintiefe), die zwar nicht makroskopisch infinitesimal aber klein im Vergleich zu anderen Längenskalen ist. Dann gilt $\vec{H}_z^{(2)} = 0$ innerhalb des Metalls und wir bekommen:

$$\vec{H}_z^{(1)} = - \frac{4\pi}{c} \vec{I}_b$$

wobei wir die Region in der Nähe von der Metalloberfläche aus den Betrachtungen ausklammern.

3.5. Allgemeine Materialgleichungen

\vec{E} und \vec{B} induzieren \vec{P} und \vec{M} :

$$\boxed{\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}]; \vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]}$$

d.h. \vec{P} und \vec{M} hängen funktional von \vec{E} und \vec{B} ab. Wie diese Abhängigkeit im einzelnen beschaffen ist, läßt sich in der Regel nur aus (mikroskop.) Materialmodellen ableiten. Dazu sind Konzepte aus der Mechanik, Quantenmechanik und statistischer Physik notwendig. Einige einfache Materialmodelle haben wir bereits kennengelernt. In folgendem wollen wir allgemeine Eigenschaften ansetzen, wobei wir uns auf den Fall der linearen Antwort eines Mediums beschränken wollen.

Wir nehmen an, daß \vec{P} nur ein Funktional von \vec{E} ist und entwickeln es eine funktionale Taylorreihe

$$\vec{P}[\vec{E}] = \underbrace{\vec{P}[\vec{0}]}_{\text{spontane Polarisation}} + \underbrace{\vec{P}_L[\vec{E}]}_{\substack{\text{induzierte} \\ \text{Polarisation} \\ \text{(lineare Funktional)}}} + \underbrace{\mathcal{O}(E^2)}_{\text{nichtlineare Effekte}}$$

Betrachte nun die lineare Antwort des makroskopischen Systems weiter (und lasse den Index „L“ fallen).

Dann gilt allgemein

$$P_i(\vec{x}, t) = \int d^3x' \int dt' \chi_{ij}^e(\vec{x}, \vec{x}', t, t') E_j(\vec{x}', t')$$

χ_{ij}^e heisst dielektr. Suszeptibilitätstensor
funktionaler (Tensor!)

Mit diesem allgemeinen Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und Polarisation hat man eine sowohl zeitlich wie räumlich nicht lokale Antwort des Mediums auf das äussere Feld.

Fall Symmetrie vorliegen, lässst sich diese Abhängigkeit reduzieren:

Homogenität in der Zeit: $\chi_{ij}^e(\vec{x}, \vec{x}'; t - t')$

+ Homogenität des Materials: $\chi_{ij}^e(\vec{x} - \vec{x}'; t - t')$

+ Isotropie: $\chi_{ij}^e(\dots) = \chi(\dots) \delta_{ij}$

In manchen Fällen lässst sich auch noch die räumliche oder / und die zeitliche Nichtlokalität vernachlässigen. Hier betrachten wir den räumlich lokalen Fall. Dann gilt:

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \int dt' \chi^e(t - t') \vec{E}(\vec{x}, t')$$

(Wir heben hier auch an, dass das Medium dielektrisch isotrop ist)

*) Summenkonvention gilt, d.h. über j wird summiert.

Diese Faltungsintegrale konvergieren sich im Fourierraum zu

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \chi^e(\omega) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)}$$

Kausalität $\chi(t-t') \equiv 0$ für $t-t' < 0$

$\Rightarrow \chi(z)$ analytisch in der oberen Halbebene!

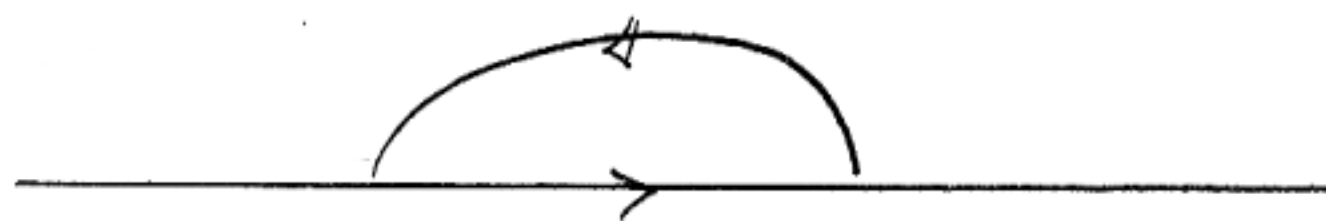
Bew: $\chi(t)$ ist nur für $t > 0$ verschieden von Null und dort endlich. Dann garantiert

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_0^{\infty} dt e^{izt} \chi(t) \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{i\operatorname{Re}(z)t} e^{-\operatorname{Im}(z)t} \chi(t) \end{aligned}$$

der Faktor $e^{-\operatorname{Im}(z)t}$ die Konvergenz des Fourierintegrals für $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Nach dem Cauchy-Integralsatz gibt dann für $z \in$ obere HE

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz' \frac{\chi(z')}{z' - z}$$



Definition der Fouriertransformation:

$$f(\vec{k}, \omega) = \int d^3r \int dt e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}, t)$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{k}, \omega)$$

Setze voraus, dass $\chi(z)$ im ∞ stark genug abfällt, so dass der Halbkreis nicht beiträgt.

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - z}$$

Für reelle z folgt

$$\chi(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\omega + i\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} =$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega' - \omega) \right] \chi(\omega')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}$$

Daraus folgen die Dispersions-Relationen
(Kramers-Kronig Relationen)

$$\operatorname{Re} \chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\operatorname{Im} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} ,$$

$$\operatorname{Im} \chi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\operatorname{Re} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} .$$

→ Linear Response Theorie
Theorie der linearen Antwort
(Statistische Mechanik)

\mathcal{P} bezeichnet das Hauptwertintegral. Es ist definiert durch

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\omega f(\omega) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} d\omega f(\omega) \right]$$

\mathcal{P} steht für "principal value".

3.6. Energieerhaltungssatz in Materie

Völlig analog zu den Überlegungen in Abschnitt 2.4. findet man für lineare Medien:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} + \vec{H}) \quad \text{Poynting Vektor}$$

$$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) \quad \text{Energiedichte}$$

\vec{j} sind die extern angeprägten Ströme

$$\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \stackrel{\text{Ampere Maxwell}}{=} \int \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}) \cdot \vec{E} dV$$

$$= \int \frac{c}{4\pi} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$= \int \frac{c}{4\pi} \left[\vec{H} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \vec{E} \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$\stackrel{\text{Faraday}}{=} \int \frac{c}{4\pi} \left[-\vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \vec{E} \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$= - \int \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \partial_t \vec{D}) dV$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} - \oint \vec{S} \cdot d\vec{f} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \partial_t \int (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) dV$$

gibt nur für lineare Medien