3. Elektrodynamik makroskopischer Medien

3.1. Formulierung der makroskopischen Theorie

$$\begin{tikzcd} \vec{E}, \vec{B} \arrow[rr] & & \vec{F} \arrow[dl, "\text{Lorentzkraft + Newton oder QM}"] \\ & \rho, \vec{j} \arrow[ul, "\text{Maxwell-Gleichungen}"] & \end{tikzcd}$$

– Rückwirkungsproblem –

Für makroskopische Systeme sind die mikroskop. Maxwellgleichungen praktisch unlösbar, da man ein Vielteilchenproblem vorliegen hat (→ Rückwirkungsproblem)! Man muß notwendigerweise auf Konzepte der Statistischen Physik zurückgreifen. Außerdem wissen wir, daß für eine Beschreibung vieler Eigenschaften der Materie auch Konzepte der Quantenmechanik unverzichtbar sind. Folglich, werden wir für die Formulierung der Elektrodynamik makroskopischer Medien eine phänomenologische Vorgehensweise wählen.

Man erwartet, daß man bei der Beschreibung makroskopischer Körper einen Teil der Quellen (Ladungen ρ und Ströme $\vec{j}$) als extern annehmen kann, d.h. aus dem „Rückwirkungsproblem" herausnehmen kann. Wir sprechen dann auch synonym von „aufgeprägten", „expliziten", „von außen vorgegebenen", „von außen manipulierbaren", etc. Ladungen und Strömen: $\rho_e, \vec{j}_e$

Den Rest der Ladungen und Ströme bezeichnen wir als induziert, d. h. dass
(i) sie über den Zyklus [externe Quellen → Felder → Lorentzkraft] im makroskopischen System induziert (oder erzeugt) werden.
(ii) sie Teil im Rückwirkungsproblem sind.
Synonym spricht man auch von „internen", „impliziten" oder eben „induzierten" Quellen:
ρ_i, $\vec{j}_i$

Formal schreiben wir

$$\boxed{\rho = \rho_e + \rho_i \quad ; \quad \vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i}$$

und fordern, daß jedes Paar separat die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

$$\boxed{\partial_t \rho_{e/i} + \operatorname{div} \vec{j}_{e/i} = 0}$$

Eine solche Aufteilung ist natürlich rein formal immer möglich. Sie gewinnt jedoch erst dadurch Sinn, daß man den jeweiligen Anteilen eine physikalisch meßbare Größe zuordnet!

Wir definieren nun makroskopische Felder $\vec{P}$ und $\vec{M}$ auf folgende Weise. Zunächst sollen die induzierten Ladungen als Quellen von $\vec{P}$ aufgefasst werden:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_i}$$

Dann gibt aufgrund der geforderten Kontinuitätsgleichung für die induzierten Ströme und Ladungen

$$0 = \partial_t \rho_i + \operatorname{div} \vec{j}_i$$
$$= \operatorname{div}(-\partial_t \vec{P} + \vec{j}_i)$$

so daß man $(\dots)$ als Rotation eines weiteren Vektorfeldes $\vec{M}$ schreiben kann

$$\boxed{c \operatorname{rot} \vec{M} = -\partial_t \vec{P} + \vec{j}_i}$$

Damit hat man ganz analog zum Ampere-Maxwell Gesetz für die Wirbel von $\vec{M}$ zwei Quellterme, einen (induzierten) Strom $\vec{j}_i$ und einen (induzierten) Verschiebungsstrom $-\partial_t \vec{P}$. (Damit sind $\vec{M}$ und $\vec{P}$ nicht eindeutig festgelegt, da man dazu sowohl Rotation und Divergenz der Vektorfelder festlegen müßte)
Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich dann formal schreiben als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{4\pi}{c} \partial_t \vec{P} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Wir definieren nun

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &:= \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{H} &:= \vec{B} - 4\pi \vec{M} \end{aligned}}$$

dielektr. Verschiebung

magn. Feldstärke

$\vec{P}$ heisst Polarisation; $\vec{M}$ heisst Magnetisierung

Dann lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen *)

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho_e \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \end{aligned}}$$

d.h. die Quellen haben sich für $\vec{D}$ und $\vec{H}$ auf die expliziten Quellen reduziert. Unser „Unwissen" über die Materie haben wir in dem Zusammenhang zwischen $\vec{D}$, $\vec{H}$ und $\vec{E}$, $\vec{B}$ „versteckt". Beachte, daß die Maxwellgleichungen lösbar sind falls man die Ladungen und Quellen vorgibt, also $(\rho_e, \vec{j}_e)$ <u>und</u> $(\rho_i, \vec{j}_i)$ oder gleichbedeutend $(\rho_e, \vec{j}_e)$ und $(\vec{P}, \vec{M})$; andernfalls ist das Gleichungssystem unterbestimmt. Oder, mit anderen Worten, bisher haben wir eine rein formale Umschreibung der Maxwellgleichungen vorgenommen, deren physikalische Relevanz sich aus der physikalischen Interpretation der Felder $\vec{P}$ und $\vec{M}$ ergibt.

*) Die homogenen Maxwellgleichungen bleiben natürlich unverändert.

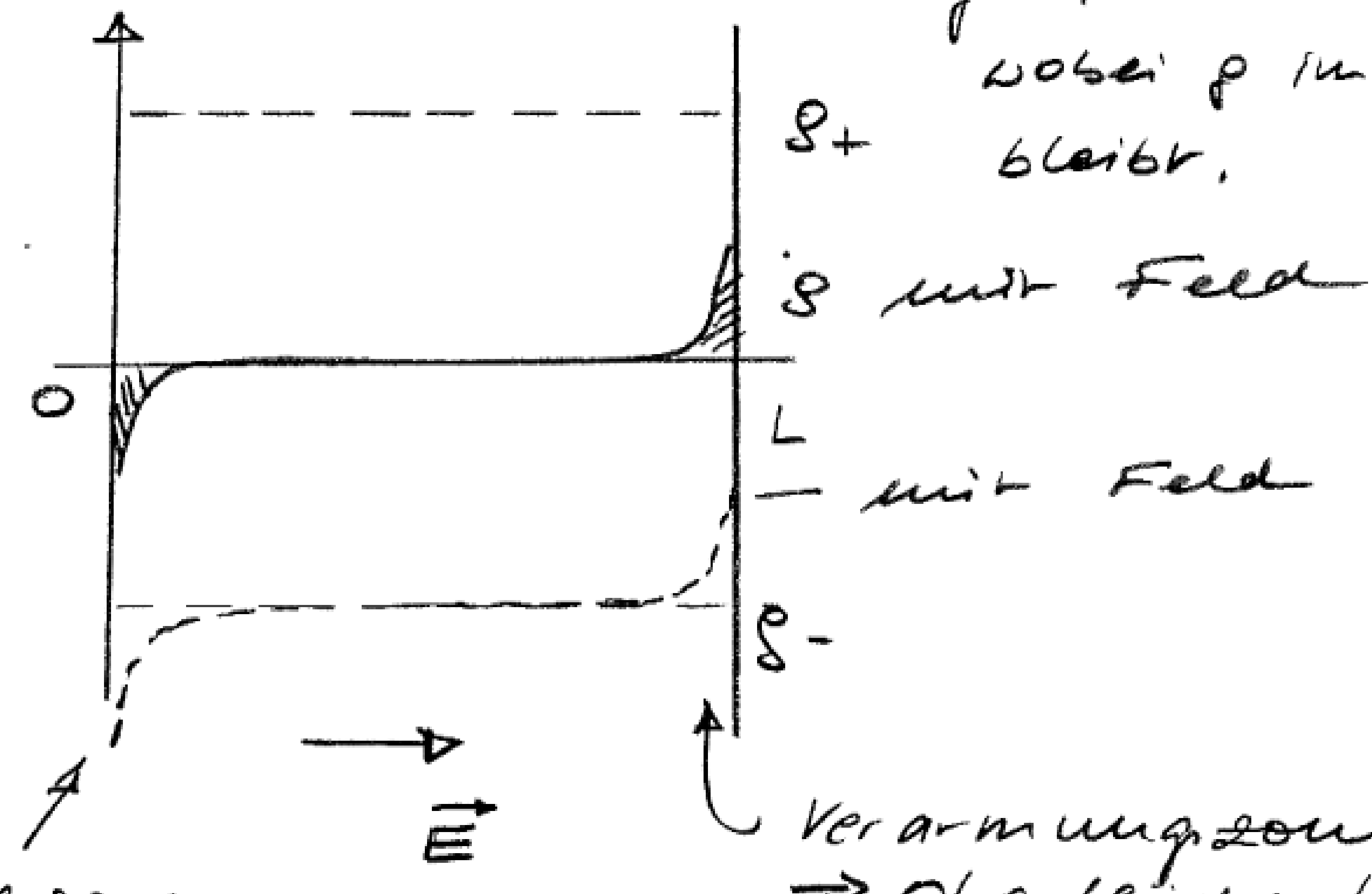
3.2. Veranschaulichung der Felder $\vec{P}$ und $\vec{M}$

<u>Neutraler Isolator</u>: $\rho_e = 0$; implizite Ladungen gebunden an Atome, und $\rho_i = 0$ ohne äußere Felder. Äußere elektrische Felder bewirken über Lorentzkraft eine relative Verschiebung*) von positiven und negativen Ladungen (Kerne und Elektronen).

$\rho = \rho_+ + \rho_-$

homogener feldfreier Isolator: $\rho_+ = -\rho_- = \text{const.}$

mit Feld: relative Verschiebung führt zu Randladungen, wobei ρ im Inneren Null bleibt.



$\Rightarrow$ <u>Oberflächenladung</u>

(Falls $\vec{E}$ im Inneren inhomogen, so entstehen auch dort Raumladungen).

Die durch das Anlegen des Feldes entstandene Ladungsverteilung $\rho_i = \rho$ heißt <u>Polarisationsladungsdichte</u>; es gilt wegen Neutralität

$\int \rho \, dV = 0$.

---

*) Hier wird natürlich angenommen, daß die Felder nicht stark genug sind, um die Elektronen aus dem Atomverband herauszulösen.

Führe nun eine vektorielle Verschiebungsdichte $\vec{P}(\vec{r})$ ein, so dass $\vec{P}(\vec{r})\cdot d\vec{f}$ angibt wieviel Ladung sich durch das Flächenelement $d\vec{f}$ verschoben hat. $\vec{P}=0$ im Außenraum des Isolators.

Es gibt $\oint_{\partial V} \vec{P}(\vec{r})\cdot d\vec{f} = -\int_V \rho \, dV$ (Beachte $\rho = \rho_i$)

(für ein beliebiges Raumgebiet V) für die Ladung, die sich durch Verschiebung aus dem Raumgebiet entfernt hat. Mit dem Satz von Gauß folgt dann sofort

$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho$.

(Die Größe $\vec{P}$ hat gegenüber ρ den Vorteil, daß diese Größe auch im homogenen Feld im Innern des Isolators von Null verschieden ist).

Eine andere Betrachtungsweise geht davon aus daß das äußere elektrische Feld an den Atomen elektrische Dipole induziert, die sich durch ein lokales Dipolmoment $\vec{p}(\vec{r})\,dV$ beschreiben lassen. Diese Vorstellung läßt sich am einfachsten mit mikroskopischen Materiemodellen in Verbindung bringen:

(i) Atome kein Dipolmoment ohne äußeres Feld. Feld induziert Polarisation durch Ladungsverschiebung im Atom.

(ii) Atom haben Dipolmoment, dessen Richtung aber ohne Feld statistisch gleichverteilt ist (thermische Fluktuationen). Feld richtet die Dipole aus: Orientierungspolarisation.

(iii) Bei hinreichend tiefen Temperaturen existieren bereits ausgerichtete Dipole (Ferroelektrikum): Spontane Polarisation

Allen diesen mikroskop. Modellen gemeinsam ist das Vorhandensein einer Polarisationsdichte $\vec{p}(\vec{r})$. Diese erzeugt am Punkt $\vec{r}$ das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \, \vec{p}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$= -\vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \, \vec{p}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

$$\overset{p.I.}{=} -\vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \, \vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{p}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) + \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}')$$

$$= -\vec{\nabla} \oint_{\partial V'} d\vec{f}' \cdot \vec{p}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Wähle V' ausserhalb des makroskop. Körpers. Dann gilt $\vec{p}(\vec{r}') = 0$ auf $\partial V'$. Folglich gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\left(\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

und man kann $\rho_i = -\vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{r})$ als implizite Ladungsquelle ansehen. Man beachte jedoch, daß die makroskopischen Maxwell-gleichungen nicht das Resultat einer Multipol-entwicklung sind sondern allgemein gelten.

Das Feld eines Punktdipols ergibt sich aus dem Potential $\phi_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$.
Betrachte dazu zwei Ladungen $\pm q$ im Abstand d und deren Feld für $r \gg d$; $\vec{p} = q \vec{d}$ (Dipolmoment).

3.3. Einfache Materiemodelle

3.3.1. Homogene Isolatoren

a) Ideales Elektrikum

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{P}(\vec{r},t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r},t)}$

$\chi_e > 0$ Materialkonstante heisst
<u>elektrische Suszeptibilität</u>

$$\vec{M} = 0 \quad \curvearrowright \quad \vec{H} = \vec{B}$$

$$\rho_i = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\chi_e \,\mathrm{div}\, \vec{E}$$

$$\vec{j}_i = \partial_t \vec{P} = -\chi_e \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi_e\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} \equiv \varepsilon \vec{E}}$$

ε heisst <u>Dielektrizitätskonstante</u>

$$\boxed{\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e}$$

χ_e, ε sind „Response"-größen, die die Reaktion der betrachteten Materie auf ein elektrisches Feld beschreiben. Wir haben hier stark vereinfachend angenommen, daß der Zusammenhang zwischen $\vec{P}$ und $\vec{E}$ zeitlich und räumlich lokal sind und χ eine Konstante ist!
Wir werden diese Konzepte später verallgemeinern.

b) Ideal magnetisierbare Material

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{B}}$$

χ_m <u>magn. Suszeptibilität</u>

$$\vec{P} = 0$$

$$\curvearrowright \begin{cases} \vec{j}_i = c\,\chi_m \operatorname{rot} \vec{B} & \text{Magnetisierungsstrom} \\ \rho_i = 0 \end{cases}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} = (1 - 4\pi\chi_m)\,\vec{B}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

(historisch unglückliche Wahl!)

$$\boxed{\mu = \frac{1}{1 - 4\pi\chi_m}} \quad \begin{matrix} > 1 & \text{paramagnetisch} \\ < 1 & \text{diamagnetisch} \end{matrix} \quad *)$$

$$\vec{D} = \vec{E}$$

μ heisst magn. Permeabilität

typisch $\mu \sim 1 \pm \mathcal{O}(10^{-6})$

Es gibt auch Materialien mit nicht-linearem Zusammenhang zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$

$\vec{B} = \vec{F}(\vec{H}) \rightsquigarrow$ Hysterese.

---

*) $\mu \gtrless 1$ impliziert $\chi_m \gtrless 0$

paramagnetisch $\chi_m > 0 \curvearrowright \vec{M} \uparrow\uparrow \vec{B}$

diamagnetisch $\chi_m < 0 \curvearrowright \vec{M} \uparrow\downarrow \vec{B}$