2.3. Die Maxwell Gleichungen

Wir haben inzwischen eine skalare Größe, $\rho(\vec{x},t)$ = Ladungsdichte und drei vektorielle Größen kennen gelernt

$\vec{j}(\vec{x},t)$ = Stromdichte

$\vec{E}(\vec{x},t)$ = elektrische Feld

$\vec{B}(\vec{x},t)$ = magnetische Feld

Beachte, daß aus der Form der Lorentzkraft klar ist, daß $\vec{B}$ ein Pseudo-vektorfeld sein muß.

Jetzt müssen wir die Grundgleichungen formulieren, denen diese Größen genügen sollen. Wir können diese Gleichungen ebensowenig wie die Newtonschen Gleichungen oder die Schrödingergleichung herleiten, sondern müssen sie postulieren. Diese Postulate sind die Zusammenfassung langjähriger experimenteller und theoretischer Forschungsarbeiten, d.h. <u>phänomenologischer Natur</u>.

→ <u>phänomenolog. Feldtheorie</u>

Diese Aussage gilt für <u>jede</u> physikalische Theorie, auch die sog. fundamentalen Theorien!

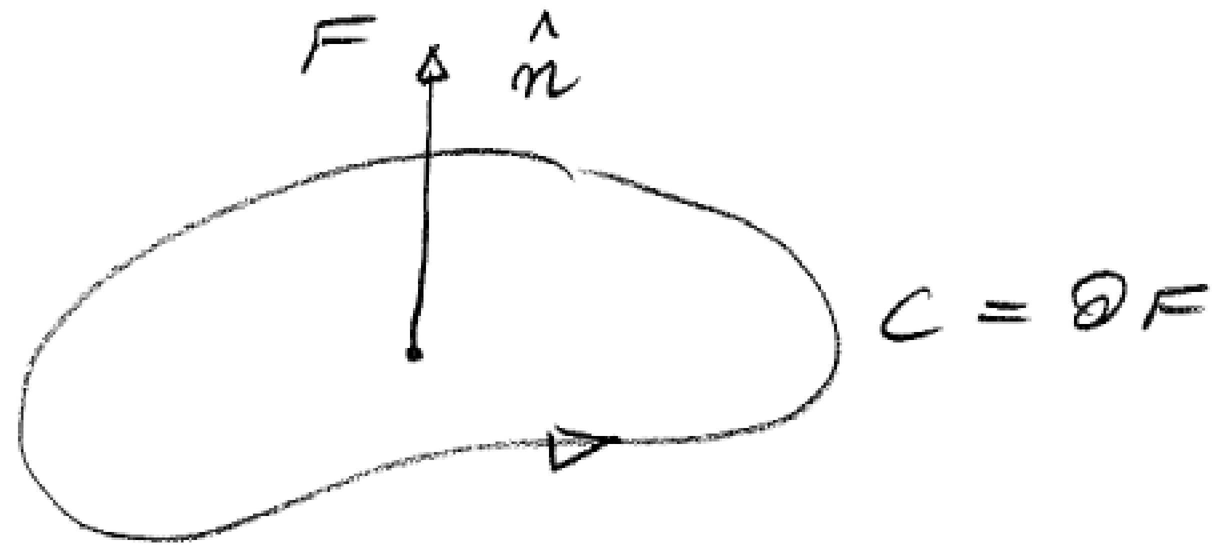
2.3.1. Homogene Maxwellgleichungen

<u>Magnetische Felder besitzen keine Quellen</u>

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$ (Axiom 2)

<u>Faraday'sches Induktionsgesetz</u>:
Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ durch eine Fläche F erzeugt einen elektrischen Wirbelstrom

$$\frac{1}{c} \partial_t \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$ (Axiom 3)



$$\frac{1}{c} \dot{\phi} = - \mathcal{E} \quad ; \quad \mathcal{E} = \text{elektromotor. Kraft}$$

Das Vorzeichen entspricht der <u>Lenz'schen Regel</u>.

Mit dem Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_F \operatorname{rot} \vec{E}\, d\vec{f}$$

läßt sich das Faraday'sche Induktionsgesetz auch in differentieller Form schreiben:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0}$$ (Axiom 3)'

Bemerkung: Im stationären Fall $\partial_t \vec{B} = 0$ ergibt sich $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ alleine aus dem zentralen Charakter des Coulomb'schen Gesetzes!

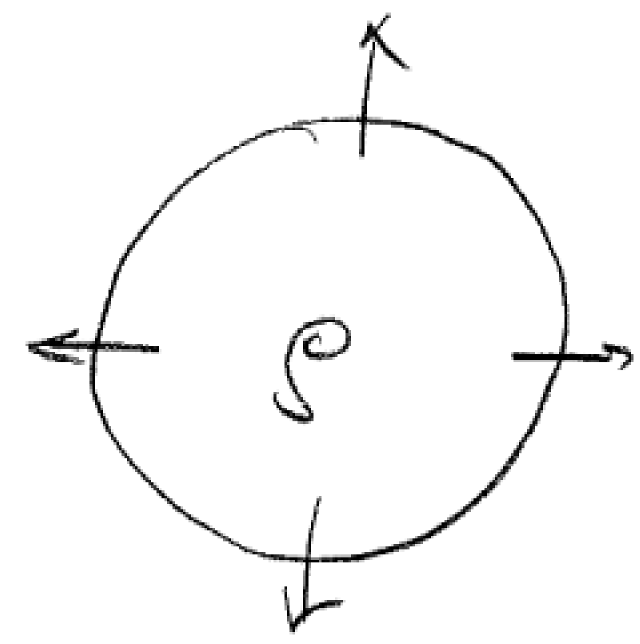
Aus den Axiomen (2) und (3) lassen sich sogenannte elektrodynamische Potentiale ableiten; darauf gehen wir später ein.

2.3.2. Inhomogene Maxwellgleichungen

Die inhomogenen Maxwellgleichungen beschreiben die Ankopplung der elektrischen und magnetischen Felder an Ladungsdichten und Stromdichten. Sie lauten:

<u>Coulomb'sches Gesetz</u>: Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes

$$\oint_{F=\partial V} \vec{E}\, d\vec{f} = 4\pi \int_V \rho\, dV$$



Mit dem Gauß'schen Satz

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{f} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{E}\, dV$$

folgt die differentielle Form

$$\boxed{\mathrm{div}\, \vec{E} = 4\pi \rho} \qquad (\text{Axiom } 4)$$

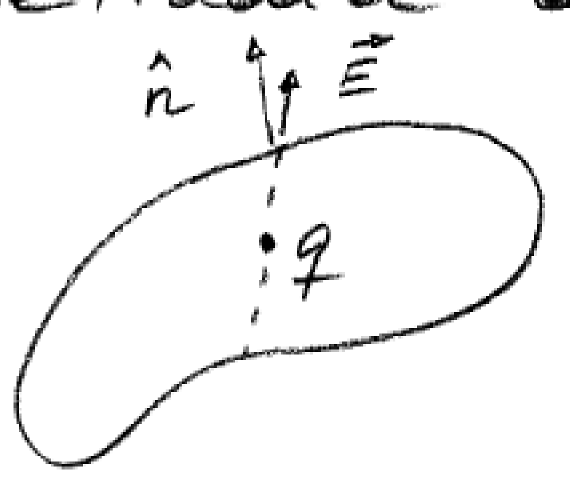
Das Coulomb'sche Gesetz läßt sich aus dem Coulomb'schen Kraftgesetz und dem Superpositionsprinzip ableiten. Dabei ist die $1/r^2$ Form wesentlich! Beachte aber, dass Axiom 4 allgemein, also auch für zeitabh. Probleme, gilt, während das Coulomb'sche Kraftgesetz nur für ruhende Ladungen gilt.

Nebenrechnungen (zu den Bemerkungen)

Für eine allgemeine Ladungsdichte gilt nach dem Coulomb'schen Kraftgesetz

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}'\, \rho(\vec{x}')\, \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

1) Betrachte eine Punktladung q



$$\vec{E}\cdot d\vec{f} = \vec{E}\cdot\hat{n}\, df = \frac{q}{r^2}\, \underbrace{\frac{\vec{x}}{r}\cdot\hat{n}}_{\cos\theta}\, df$$

$|\vec{x}| = r$

$df = r^2\, d\Omega / \cos\theta$

Ω = Raumwinkel

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = \int \frac{q}{r^2}\, r^2\, d\Omega = 4\pi q$$

r^2 kürzt sich!

allgemein $\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{f} = 4\pi \sum_i q_i = 4\pi \int \rho\, dV$

2) $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \int d^3\vec{x}'\, \rho(\vec{x}')\; \vec{\nabla}\times \underbrace{\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}_{= \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)}$$

$$= \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$$

mit $\phi = \int d^3\vec{x}'\, \rho(\vec{x}')\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

Skalares Potential.

Ampere - Maxwell Gesetz

Elektrische Ströme und Verschiebungsströme sind Quellen für magnetische Wirbel

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\frac{4\pi}{c}\int_F \vec{j}\cdot d\vec{f}}_{\text{Ampere}} + \underbrace{\frac{1}{c}\partial_t \int_F \vec{E}\cdot d\vec{f}}_{\text{Maxwell'scher Verschiebungsstrom}}$$

oder in differentieller Form

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}} \qquad (\text{Axiom } 5)$$

Man beachte, daß der Maxwell'sche Verschiebungsstrom notwendig ist um die Ladungserhaltung zu gewährleisten.

Bilde dazu die Divergenz auf beiden Seiten

$$-\frac{1}{c}\partial_t \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{=4\pi\rho \text{ nach dem Coulomb Gesetz}} - \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \iff \partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \quad \checkmark$$

Bis auf den Verschiebungsstrom waren die Grundgleichungen der Elektrodynamik bereits vor Maxwell bekannt.

(Zusammenfassung)

Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{(keine magn. Monopole)}$$
$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Coulomb)}$$
$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{(Ampère-Maxwell)}$$
$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = 0 \qquad \text{(Faraday + Lenz)}$$

Lorentzkraft auf Punktladung q

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}$$

Statische Felder : $\partial_t = 0$

Dann entkoppeln elektrische und magnetische Felder

$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$

(Elektrostatik)

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

(Magnetostatik)

Übergang zu SI-Einheiten

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\,\partial_t\vec{E} = \vec{j}\cdot\mu_0$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad ; \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0$$

$\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 1/c$

ε_0 und μ_0 heissen elektrische und magnetische Permeabilität des Vakuums

2.3.3. Elektrodynamische Potentiale

Wir verwenden nun grundlegende Sätze aus der Vektoranalysis um die elektrodynamischen Potentiale einzuführen. Damit lassen sich die 6 Funktionen $(\vec{E}, \vec{B})$ auf 4 Funktionen $(\phi, \vec{A})$ und eine Eichfreiheit reduzieren.

Aus der Quellenfreiheit, $\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$, des magn. Feldes folgt, daß man $\vec{B}$ als Rotation eines Vektorpotentials schreiben kann

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A}.$$

Dabei ist $\vec{A}$ eindeutig bis auf die Transformation

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

wobei Λ ein beliebiges skalares Feld ist.

Damit lässt sich das Faraday'sche Induktionsgesetz auf die Form

$$0 = \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} + \mathrm{rot}\, \vec{E} = \mathrm{rot} \left(\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} + \vec{E} \right)$$

bringen. Folglich gilt

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} + \vec{E} = - \vec{\nabla} \phi,$$

wobei das skalare Feld ϕ eindeutig bis auf $\phi_0(t)$ unabh. von $\vec{x}$. Zusammen gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \mathrm{rot}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= - \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \end{aligned}}$$

$\vec{A}$ heisst <u>Vektorpotential</u>, ϕ <u>skalares Potential</u>.

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ bleiben unverändert unter der Eichtransformation

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\to \phi' = \phi + \phi_0(t) - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda \end{aligned}}$$

(Beweis durch Einsetzen)

Beispiele für Eichungen:

(a) Strahlungseichung: $\phi', \vec{A}' = (\phi_s, \vec{A}_s)$

Wähle $\boxed{\phi_s = 0}$

$$0 = \phi + \phi_0(t) - \frac{1}{c}\partial_t \Lambda(\vec{x},t) \quad \Big/ \int_0^t d\tau$$

$$\Lambda(\vec{x},t) = \Lambda(\vec{x},0) + c\int_0^t d\tau \left(\phi(\vec{x},\tau) - \phi_0(\tau)\right)$$

Dann

$$\boxed{\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}_s , \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A}_s}$$

(b) Lorentzeichung: $\phi', \vec{A}' = (\phi_L, \vec{A}_L)$

Sei $\psi := \vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi$. Dann

$$\vec{\nabla}\vec{A}' + \frac{1}{c}\partial_t \phi' = \psi + \Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Lambda \stackrel{!}{=} 0$$

Wähle Λ so daß $\Delta\Lambda - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\Lambda = -\psi$

Dann

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_L + \frac{1}{c}\partial_t \phi_L = 0}$$

In der Lorentzeichung sind die Potentiale bis auf eine skalare Funktion $\tilde{\Lambda}$ eindeutig, welche der Wellengleichung genügt!

$$\Delta \tilde{\Lambda} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \tilde{\Lambda} = \Box \tilde{\Lambda} = 0$$

$\Box$ D'Alembert operator

$\Delta = \nabla^2$ Laplace operator

c) Coulombeichung $(\phi', \vec{A}') = (\phi_c, \vec{A}_c)$

wähle Λ so daß $\boxed{\operatorname{div} \vec{A}' = 0}$

$0 = \operatorname{div} \vec{A}' = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta \Lambda$

Man kann nun in den jeweiligen Eichungen die inhomogenen Maxwellgleichungen durch Vektor- und Skalar-Potential ausdrücken.

Das Coulombsche Gesetz lässt sich als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}\right) = 4\pi\rho$$

oder

$$\boxed{\Delta \phi + \frac{1}{c}\partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho} \quad \text{(Coulomb)}$$

schreiben

Das Ampère-Maxwell Gesetz bekommt die Form

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}\right)$$

bzw.*)

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t \phi\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

(Ampère-Maxwell)

---

*) $\left[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\right]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j \varepsilon_{klm}\partial_l A_m = \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j \partial_l A_m$
$= \partial_i \partial_l A_l - \partial_l \partial_l A_i = \left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}\right]_i$

Lorentzeichung: In dieser Eichung entkoppeln das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$. Man erhält für beide eine Wellengleichung

$$\Box\,\phi = \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi = -4\pi\rho$$

$$\Box\,\vec{A} = \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

oder kurz $\quad \Box\begin{pmatrix}\phi\\ \vec{A}\end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}\rho c\\ \vec{j}\end{pmatrix}$

Coulombeichung: In der Coulombeichung reduziert sich die Gleichung für das skalare Potential ϕ auf die Poisson Gleichung +)

$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

Wie wir später sehen werden ist diese Gleichung von fundamentaler Bedeutung für die Elektrostatik (und weit darüber hinaus!). Ihre Lösung für eine vorgegebene Ladungsverteilung $\rho(\vec{x},t)$ lautet *)

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

also das momentane Coulombpotential der Ladungsdichte $\rho(\vec{x},t)$.

+) Der Spezialfall $\Delta\phi = 0$ heisst Laplace Gleichung.

---

*) Später werden wir den Fall diskutieren, daß $\rho(\vec{x})$ innerhalb eines beliebigen Volumens gegeben ist und die Effekte der restlichen Ladungen (außerhalb V) durch Randbedingungen auf ∂V formuliert werden (Elektrostatik).

Die Gleichung für das Vektorpotential lautet

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\partial_t \phi$$

Wir zerlegen nun den Strom in einen longitudinalen und transversalen Anteil

$$\vec{j} = \vec{j}_\ell + \vec{j}_t$$

wobei $\vec{\nabla} \times \vec{j}_\ell = 0$ wirbelfrei und $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_t = 0$ quellenfrei ist, das ist nach Sätzen der Vektoranalysis immer möglich.

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ oder $\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\ell = 0$ führt die Poissongleichung auf

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\ell = -\partial_t \rho = +\partial_t \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}_\ell - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\partial_t \phi\right) = 0$$

Wegen rot $\vec{j}_\ell = 0$ und rot $\nabla\phi = 0$ folgt dann

$$\frac{4\pi}{c}\vec{j}_\ell = \frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\phi$$

Folglich gilt

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c}\partial_t^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_t}$$

i.e. die Quellen des Vektorpotential sind die transversalen Ströme mit $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_t = 0$.
Diese Eichung heisst daher häufig auch „transversale Eichung".

Da
$$\vec{j}_\ell = \frac{1}{4\pi}\partial_t \vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi}\partial_t \vec{\nabla}\int \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\vec{j}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

kann man den transversalen Strom schreiben als

$$\vec{j}_t = \vec{j} - \vec{j}_\ell = \vec{j} + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int \frac{\vec{\nabla}'\vec{j}(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'.$$

2.4. Der Energieerhaltungssatz

Die Rate mit der ein elem. Feld Arbeit an einer Ladung verrichtet ergibt sich aus der Lorentzkraft

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = q\,(\vec{v}\cdot\vec{E} + \underbrace{\vec{v}\cdot(\tfrac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})}_{=0})$$

Daher gibt allgemein für eine Stromdichte $\vec{j}=\rho\vec{v}$

$$\int d^3x\;\vec{j}\cdot\vec{E}$$

ist die <u>Energietransferrate vom elem. Feld auf eine Ladungsverteilung.</u>

Wir verwenden nun die Maxwellgleichungen um $\vec{j}$ zu eliminieren

$$\vec{j}\cdot\vec{E} \underset{\substack{\text{Ampere}\\ \text{Maxwell}}}{=} \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\right)\cdot\vec{E}$$

$$- \frac{c}{4\pi}\,(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{E} + \tfrac{1}{c}\partial_t\vec{B}}_{\substack{=0\\ \text{Faraday}}})\cdot\vec{B}$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{8\pi}\partial_t(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$$

Dabei haben wir die Vektoridentität*)

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{E}$$

verwendet

---

*) $[\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})] = \partial_i\,\varepsilon_{ijk}E_jB_k = \varepsilon_{ijk}\left[(\partial_iE_j)B_k + E_j\partial_iB_k\right]$
$= (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{B} - (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{E}\,;$

Interpretation

(I) In der Abwesenheit von Ladungen ($\vec{j}=0$) gilt

$$\boxed{\partial_t \underbrace{\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{B}^2}{8\pi}\right)}_{=:u} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{B}\right)}_{=:\vec{S}} = 0}$$

Energiedichte

Energiestromdichte
Poynting Vektor

$$\partial_t u + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0$$

analoge Form zu Ladungserhaltung

(II) In der Gegenwart von Ladungen gilt

$$\boxed{\partial_t u + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\int_V dV\, u + \oint_{\partial V} \vec{S}\, d\vec{f} + \int_V dV\, \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$$

Die zeitliche Änderung der Energie des elm. Feldes ergibt sich über den Verlust von Energieströmen durch die Oberfl. und der Rate des Energieübertrags auf die Ladungen.