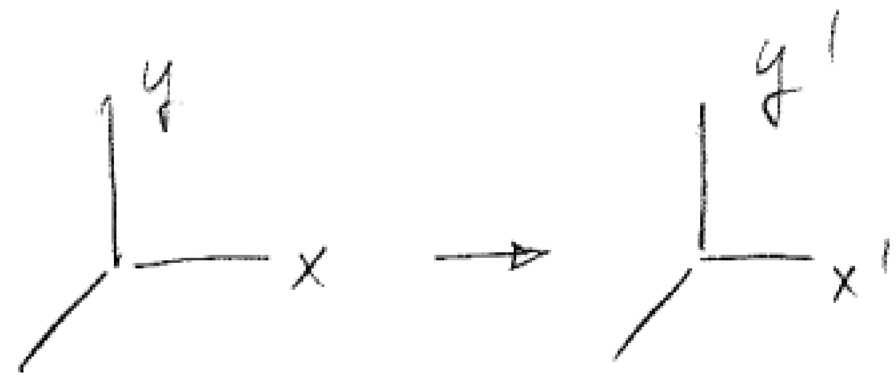
Feld einer Punktladung



e ruht in K

$$\vec{B} = 0 \,, \quad \vec{E} = \frac{e\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

(a) $$E'_x(x') = E_x(x) = e\,\frac{x}{r^3}$$

$$b^2 = y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2 \qquad \text{(Abstand zur x-Achse)}$$

$$E'_x = \frac{e\gamma(x' + vt')}{\left(\gamma^2 (x' + vt')^2 + b^2\right)^{3/2}}$$

(b) $$E'_y = \gamma E_y = \frac{e\gamma y'}{(\quad)^{3/2}}$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{e\gamma z'}{(\quad)^{3/2}}$$

Die γ Faktoren verzerren das Feld. Betrachte Felder zur Zeit $t' = 0$

$$\vec{E}'(\vec{x}') = e\,\frac{\gamma \vec{x}'}{\left(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

$$= e\,\frac{(1-\beta^2)\,\vec{x}'}{\left(r'^2 - \beta^2 b^2\right)^{3/2}}$$

Die Feldlinien sind Geraden wie bei der ruhenden Ladung.

Der Betrag von $\vec{E}'$ ist

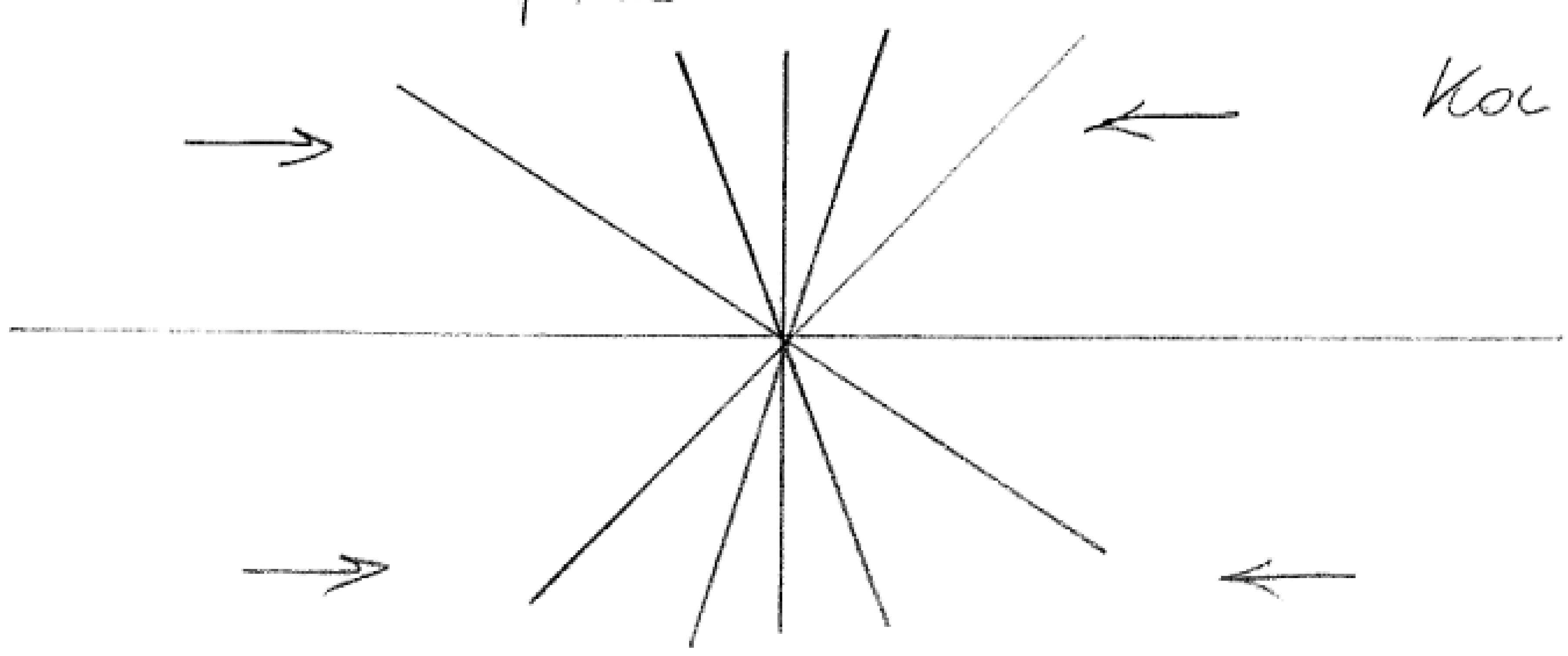
$$|\vec{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2(1-\beta^2\sin^2\theta')^{3/2}} \; ; \quad \sin\theta' = \frac{b}{r'}$$

Für feste r', $|\vec{E}'|$ maximal für $\theta' = \pi/2$ ($\perp$ Bewegungsrichtung)

$$|\vec{E}'| = \frac{e}{r'^2\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \quad \theta' = \pi/2$$

$|\vec{E}'|$ minimal für $\theta' = 0$ ($\parallel$ Bewegungsrichtung)

$$|\vec{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2} \qquad \theta' = 0.$$



Kontraktion.

Magnetfeld

$$B_x' = 0 \, , \quad B_y' = \beta E_z' \, , \quad B_z' = -\beta E_y'$$

$$\vec{B}' = \vec{\beta} \times \vec{E}'$$

Eine bewegte Ladung erzeugt also ein magnetisches Feld proportional zu $\frac{\vec{v}}{c}$.

10.3. Variationsprinzip für die Feldgleichungen

Die Grundgleichungen der Physik lassen sich aus Wirkungsprinzipien gewinnen. Betrachte allgemein

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)\, d^4x$$

ϕ_a bezeichne eine Anzahl von Feldern (z. B. A^μ für die Maxwell Theorie). Untersuche die Variation von $S[\phi]$

$$I(\varepsilon) := S[\phi + \varepsilon \chi] \quad , \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \chi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} \right] d^4x$$

wobei $\phi_{a,\mu} := \partial_\mu \phi_a$ abgekürzt wird.

Für den 2 ten Term verwenden wir die Identität

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \right) \chi_a$$

Unter Verwendung des Gauß'schen Satzes gilt dann

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \equiv \delta S = \int_{\mathcal{D}} \sum_a \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \right] \chi_a\, d^4x + \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a\, df_\mu$$

Damit hat man gezeigt, daß die Wirkung für das Feld ϕ genau dann stationär ist, bezüglich Variationen ist, welche am Rande verschwinden, wenn die Euler-Lagrange Gleichungen gelten:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{a,\mu}} = 0}$$

Eine Anwendung dieses allgemeinen Prinzips ist die Maxwell'sche Theorie. Die Lagrange-dichte

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha}$$

führt zu den Maxwellgleichungen.

Dies läßt sich wie folgt zeigen. Es gilt

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)$$
$$- \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha$$

Folglich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} j_\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} 2(-2) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten folglich

$$\boxed{\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha} \quad \left(\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \right)$$

10.4. Bewegungsgleichung für Punktteilchen im festen elem. Feld

Wir definieren als 4er Geschwindigkeit

$$\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu}$$

wobei $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$ die Eigenzeit ist.
Es gilt

$$\underline{u^\mu} = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \vec{x}) = \underline{(\gamma c, \gamma \vec{v})}$$

Ferner gilt für das Minkowski Skalarprodukt

$$u \cdot u = u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = \frac{c^2 - v^2}{1-\beta^2} = c^2;$$

Als 4er Impuls definiert man

$$\boxed{p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v})}$$

$$\frac{p^0}{mc} = \gamma \; ; \quad \frac{|\vec{p}|}{p^0} = \beta$$

$$\boxed{p \cdot p = m^2 c^2}$$

Durch Ableiten nach der Eigenzeit τ ergibt sich daraus dann

$$\dot{p}^\mu p_\mu = p^\mu \dot{p}_\mu = 0$$

Nun wollen wir die Bewegungsgleichung für einen geladenen Massenpunkt aufstellen. Diese folgt aus der Annahme, daß im momentanen Ruhesystem der Ladung gilt

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = e\vec{E} \qquad (\vec{v} = 0)$$

In diesem System gilt
$\dot{p}^0 = 0$ und $p^0 = mc$

Somit ist im momentanen Ruhesystem

$$\boxed{\dot{p}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

Diese lorentzkovariante Gleichung gilt dann in jedem Lorentzsystem!

NR:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \\ -\vec{v} \equiv 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \dot{p}^0 = 0 \; ; \quad \dot{p}_i = \frac{e}{c} E_i \cdot c$$

$$\dot{p}_i = \frac{d}{d\tau} p_i = \gamma \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \underset{(\gamma = 1,\ \frac{d\gamma}{dt} = 0)}{=} \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

---

*) $\vec{v} = 0$; Dann folgt aus $p_\mu \dot{p}^\mu = 0$: $\dot{p}^0 = 0$
weiter aus $\frac{p^0}{mc} = \gamma = 1$ folgt $p^0 = mc$

Die Zerlegung der kovarianten Gleichung in raum-zeitliche Anteile ergibt (nach einfacher Rechnung)

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)$$
$$\frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = e\vec{E}\cdot\vec{v}$$

wobei auf der rechten Seite einmal die Lorentzkraft und einmal die Leistung des Feldes am Massenpunkt stehen. Wir interpretieren daher

$$E := \gamma m c^2$$

als die Energie des Massenpunktes. Man nennt deshalb auch

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

den Energie-Impuls Vektor des Teilchens.

Damit gilt
$$E = \gamma m c^2$$
und
$$E = |\vec{p}|c^2/v$$

Für Teilchen mit Ruhemasse $m = 0$ gilt $v = c$ und folglich $E = |\vec{p}|c$

Allgemein hat man

$$m^2c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}$$

also
$$E^2 = |\vec{p}|^2c^2 + m^2c^4$$

oder

$$E = c\sqrt{p^2+m^2}$$

Für $v/c \ll 1$

$$E \cong \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{nichtrel. kin. Energie}} + \underbrace{\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}}_{\text{relativistische Korrektur}} + \dots$$

Variationsprinzip

Wir zeigen nun, daß das Hamiltonsche Variationsprinzip

$$\delta \int L \, d\lambda = 0$$

für die Lagrangefunktion

$$L\left(x^\mu(\lambda), \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) = -mc\sqrt{\eta^{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} - \frac{e}{c}A_\mu(x(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}^\mu = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

ergibt.

Beachte, daß das Variationsprinzip unabhängig von der Parameterwahl λ ist.

Ferner ist wichtig, daß sich die Lagrangedichte bei einer Umeichung nur um eine totale Ableitung ändern und damit die Bewegungsgleichungen unverändert bleiben.

$$L \to L - \frac{e}{c} \partial_\mu \Lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} =$$

$$= L - \frac{e}{c} \frac{d\Lambda(x(\lambda))}{d\lambda}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

Explizit gilt

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = -\frac{1}{2} mc \frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda}}} 2 \frac{dx_\mu}{d\lambda}$$

$$- \frac{e}{c} A_\mu$$

Für $\lambda = \tau$ (Eigenzeit) gilt

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)} = - \frac{mc}{\underbrace{\sqrt{u \cdot u}}_{= c}} \underbrace{\frac{dx_\mu}{d\tau}}_{u_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu$$

$$= - m u_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = - \frac{e}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = - \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu}$$

$$\Downarrow \quad \frac{d}{d\tau}(m u_\mu) = \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu} - \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} A_\mu$$

$$= \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}$$

$$= \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu} - \frac{e}{c} u^\nu A_{\mu,\nu}$$

$$= \frac{e}{c} u^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{e}{c} u^\nu F_{\mu\nu}$$

$$\curvearrowright \quad \dot{p}_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad \checkmark$$

Hamiltonscher Formalismus

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\left(\phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}\right)$$

wenn man $\lambda = t$ wählt

Der kanonisch konjugierte Impuls zu $\vec{x}$ ist

$$\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \underset{(\dot{\vec{x}} = \vec{v})}{=} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

wobei $\vec{p}$ der mechanische Impuls ist.

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \left(\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{x}} - L\right) \underbrace{(\vec{\pi}, \vec{x})}_{\text{Funktion von } \vec{\pi} \text{ und } \vec{x}}$$

- $\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{x}} - L =$

$$= \gamma m \vec{v}^{\,2} + \frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + \frac{1}{\gamma} m c^2 + e\phi - \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$

$$= \gamma m c^2 \left(\beta^2 + (1-\beta^2)\right) + e\phi$$

$$= \gamma m c^2 + e\phi$$

- $$\left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} =$$

$$= m^2 c^2 \left(-1 + \underbrace{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{=\gamma^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}$$

Damit

$$H(\vec{\pi},\vec{x}) = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2} + e\phi$$

Nichtrel. Grenzfall

$$H = mc^2 + \frac{1}{2}m\left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi$$

10.5. Energie - Impuls Tensor

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im elektr. Feld lautet

$$m\dot{u}^\mu = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu = K^\mu$$

4er Kraft

Folglich ist die 4er Kraftdichte k^μ für eine kontinuierliche Stromverteilung

$$k^\mu = \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu$$

Wie bereits in Kapitel 1 drücken wir diese mit Hilfe der Feldgleichungen durch die Felder alleine aus

$$k^\mu = -\frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\nu \partial_\alpha F^{\nu\alpha}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\partial^\alpha F^{\mu\nu}) F_{\nu\alpha}}$$

$$\underset{F \text{ anti-sym.}}{=} F_{\nu\alpha} \frac{1}{2} (\partial^\alpha F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\mu\alpha})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha})$$

$$+ \frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} (\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu})$$

Nach der homogenen Gleichung gilt

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = - \partial^\mu F^{\nu\alpha}$$

$$\Rightarrow k^\mu = -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) - \frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} \partial^\mu F^{\nu\alpha}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\partial_\alpha\left(F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}\right) - \frac{1}{16\pi}\partial^\mu\left(F_{\nu\alpha}F^{\nu\alpha}\right)$$

Damit findet man

$$\boxed{\begin{aligned} k^\mu &= -\partial_\alpha T^{\mu\alpha} \\ T^{\mu\alpha} &= \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\nu}F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\mu}F_{\nu\beta}F^{\nu\beta}\right) \end{aligned}}$$

Diese Gleichungen sind eine kompakte Formulierung des Energie- und Impuls-erhaltungssatzes der Elektrodynamik

Explizit:

$$k^\mu = \left(\frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{E},\ \rho E + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right)$$

$$\left(T^{\mu\nu}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) & \frac{1}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} \\ \hline \frac{1}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} & \begin{array}{l}\frac{1}{4\pi}\big(\frac{1}{2}E^2\delta_{ik} - E_iE_k \\ \quad + \frac{1}{2}B^2\delta_{ik} - B_iB_k\big)\end{array} \end{array}\right.$$

0-Komponente:

$$\boxed{\partial_t u + \operatorname{div} S + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0}$$ Energiesatz

$$u = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

Raumkomponenten

$$k^i = -T^{i\alpha}{}_{,\alpha} = -T^{i0}{}_{,0} - T^{ik}{}_{,k}$$

$$\boxed{k^i + \partial_t \Pi^i = -\partial_k T^{ik}}$$ Impulssatz

wobei

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

$$T_{ik} = -\frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right]$$

Interpretation

$$\frac{d}{dt} \left(P_i^{mech} + P_i^{Feld} \right) = - \oint_{\partial V} T_{ik} \, df_k$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}^{mech} = \int_V \vec{k} \, dV$$ zeitliche Änderung des mech. Impulses

$$P^{Feld} = \int_V \vec{\Pi} \, dV$$ Impuls des Feldes

$$\Gamma \cdot S = - \oint_{\partial V} T_{ik} \, df_k$$ Impulsfluß nach V über ∂V

$-T_{ik} n_k$ Kraft pro Flächeneinheit

Maxwellsche Spannungen.