A. Superposition von Wellen, Fourierreihen

1. Addition von Wellen gleicher Frequenz

Die Superposition einer beliebigen Anzahl von kohärenten harmonischen Wellen mit gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung führt auf eine harmonische Welle der gleichen Frequenz.

$$\underline{\underline{E}} = \sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} \cos(kx + \delta_j \pm \omega t)$$

$$= \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} e^{i\delta_j} e^{i(kx \pm \omega t)}$$

$$= \underline{\underline{E^{(0)} \cos(kx + \delta \pm \omega t)}}$$

$$E^{(0)} e^{i\delta} = \sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} e^{i\delta_j}$$

$$\rightarrow \quad E^{(0)} (\cos\delta + i \sin\delta) = \sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} (\cos\delta_j + i \sin\delta_j)$$

$$\curvearrowright \quad \underline{\underline{\tan\delta = \frac{\sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} \sin\delta_j}{\sum_{j=1}^{N} E_j^{(0)} \cos\delta_j}}}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{\left(E^{(0)}\right)^2}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} E_j^{(0)} E_k^{(0)} e^{i(\delta_j - \delta_k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(E_j^{(0)}\right)^2 + \sum_{j \neq k} E_j^{(0)} E_k^{(0)} e^{i(\delta_j - \delta_k)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(E_j^{(0)}\right)^2 + \sum_{j>k} \sum_{k=1}^{N} E_j^{(0)} E_k^{(0)} \cdot \left[e^{i(\delta_j - \delta_k)} + e^{-i(\delta_j - \delta_k)} \right]$$

$$= \underline{\underline{\sum_{j=1}^{N} \left(E_j^{(0)}\right)^2 + 2 \sum_{j>k} \sum_{k=1}^{N} E_j^{(0)} E_k^{(0)} \cos(\delta_j - \delta_k)}}$$

2 Grenzfälle

(1) **Zufällige Phasen δ_j**

Atom: δ_j konstant für ~ 10 nsec

Messung über Zeitintervall $\gg$ 10 nsec

$$\langle \cos(\delta_j - \delta_k) \rangle = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad \left(E^{(0)}\right)^2 = N \left(E_1^{(0)}\right)^2$$

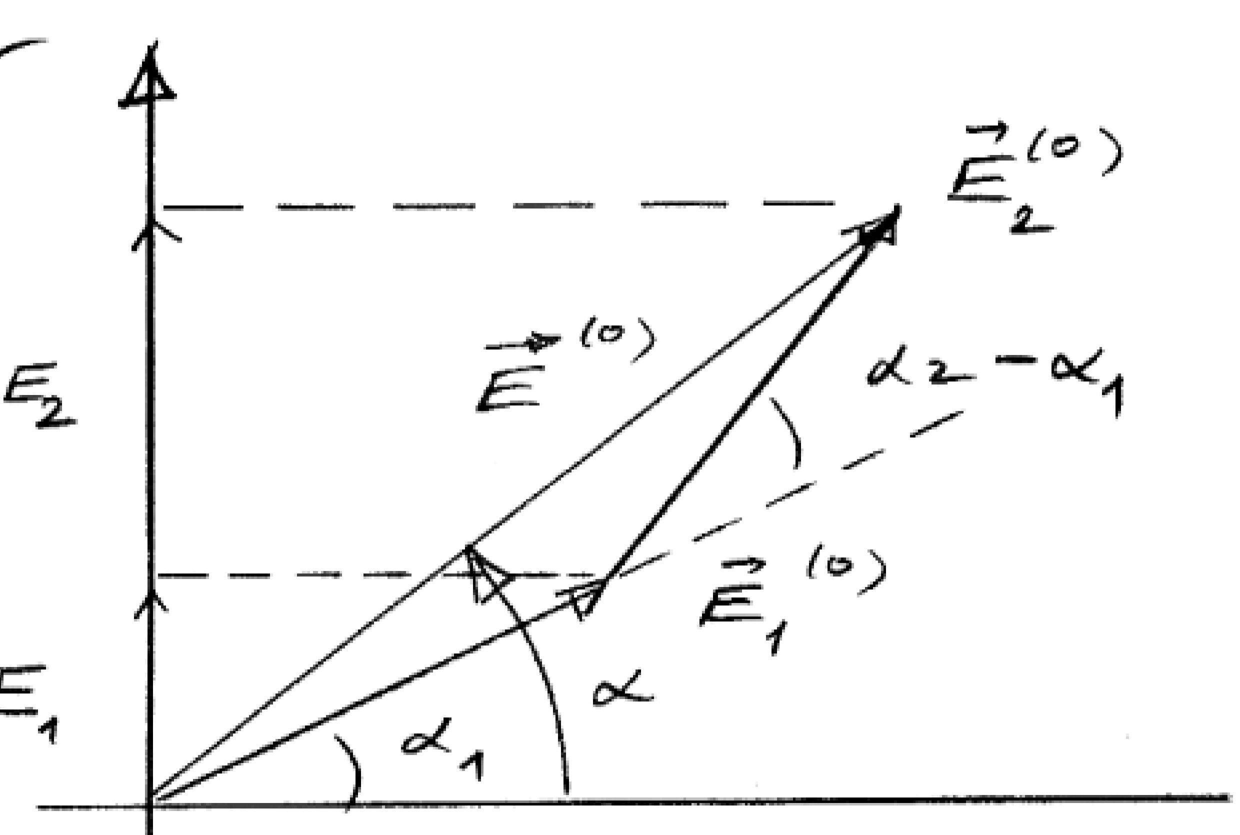
falls $E_i^{(0)} = E_1^{(0)}$ (alle gleich)

(2) **Kohärente Quelle** $\quad \delta_j = \delta_k$

$$\left(E^{(0)}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{k} E_j^{(0)}\right)^2 = N^2 \left(E_1^{(0)}\right)^2$$

falls $E_i^{(0)} = E_1^{(0)}$ (alle gleich)

Bemerkung: Die Superposition von Wellen stellt man sich am besten als die Addition von Vektoren in der komplexen Ebene (<u>Phasoren</u>) vor



$\vec{E}_1^{(0)} = E_1^{(0)} e^{i\delta_1}$

etc.

= Phasor

$$\left(\vec{E}^{(0)}\right)^2 = \left(\vec{E}_1^{(0)} + \vec{E}_2^{(0)}\right)^2 = \left(\vec{E}_1^{(0)}\right)^2 + \left(\vec{E}_2^{(0)}\right)^2 + 2\, E_1^{(0)} E_2^{(0)} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\tan\alpha = \frac{E_1^{(0)} \sin\alpha_1 + E_2^{(0)} \sin\alpha_2}{E_1^{(0)} \cos\alpha_1 + E_2^{(0)} \cos\alpha_2}$$

2. Elementare Beispiele für die Superposition harmonischer Wellen unterschiedlicher Frequenz

Wir betrachten zwei harmonische Wellen gleicher Amplitude aber unterschiedlicher Frequenz

$$E_1 = E_{01} \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$E_2 = E_{01} \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ &= E_{01} \left[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t) \right] \\ &= 2E_{01} \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2} x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2} t \right) \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2} x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2} t \right) \\ &\equiv 2E_{01} \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \cos(k_m x - \omega_m t) \\ &\equiv E_0(x,t) \cos(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \end{aligned}$$

mit $E_0(x,t) = 2E_{01} \cos(k_m x - \omega_m t)$

$\bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

mittlere Wellenzahl und Kreisfrequenz

$k_m = \frac{k_1-k_2}{2}$, $\omega_m = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$

Modulations-Wellenzahl und -Kreisfrequenz

→ siehe Figur nächste Seite

schnelle Oszillationen mit $\bar{\omega}$

langsame — " — ω_m

↝ Schwebungen

3. Fourieranalyse periodischer Funktionen

Die Aussage des Fourier-Theorems besteht darin, daß man eine Funktion $\varphi(x)$ mit der Periode L aus einer Summe von harmonischen Funktionen zusammensetzen kann, deren Wellenlängen $\lambda_n = \frac{L}{n}$ bzw. Wellenzahlen $k_n = \frac{2\pi}{L} \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind: $\lambda_1 = L$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}L$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}L, \ldots$

$$k_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad k_2 = \frac{4\pi}{L}, \quad k_3 = \frac{6\pi}{L}, \ldots$$

<u>Satz</u> (ohne Spezifikation der Konvergenz)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \varphi(x)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \varphi(x) \cos(k_n x) \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \varphi(x) \sin(k_n x)$$

Die Form der Fourierkoeffizienten läßt sich über die Orthonormalität der harmonischen Funktionen verifizieren

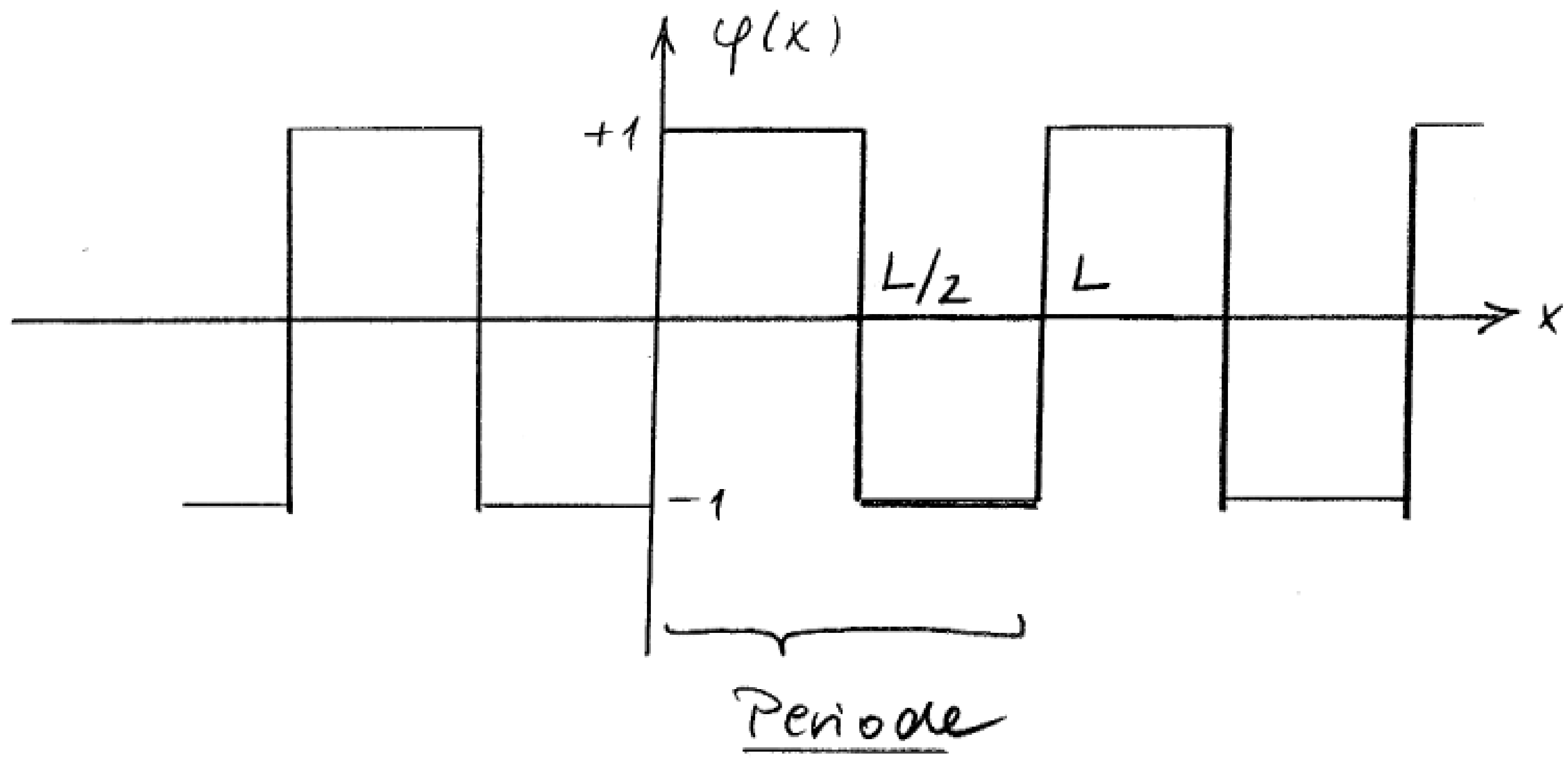
$$\int_0^L dx\, \cos(k_n x) \sin(k_m x) = 0$$

$$\int_0^L dx\, \cos(k_n x) \cos(k_m x) = \delta_{nm}$$

$$\int_0^L dx\, \sin(k_n x) \sin(k_m x) = \delta_{nm}$$

Beispiele

(a) Periodische Rechteck-Welle



Da $\varphi(x)$ ungerade folgt $a_n = 0$, $n \geq 0$.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx\, \varphi(x) \sin k_n x =$$

$$= \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dx \sin(k_n x) = -\frac{4}{L} \frac{1}{k_n} \cos \frac{2\pi n x}{L} \Big|_0^{L/2}$$

$$= -\frac{4}{2\pi n} \left(\cos(\pi n) - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos n\pi \right) = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n \right)$$

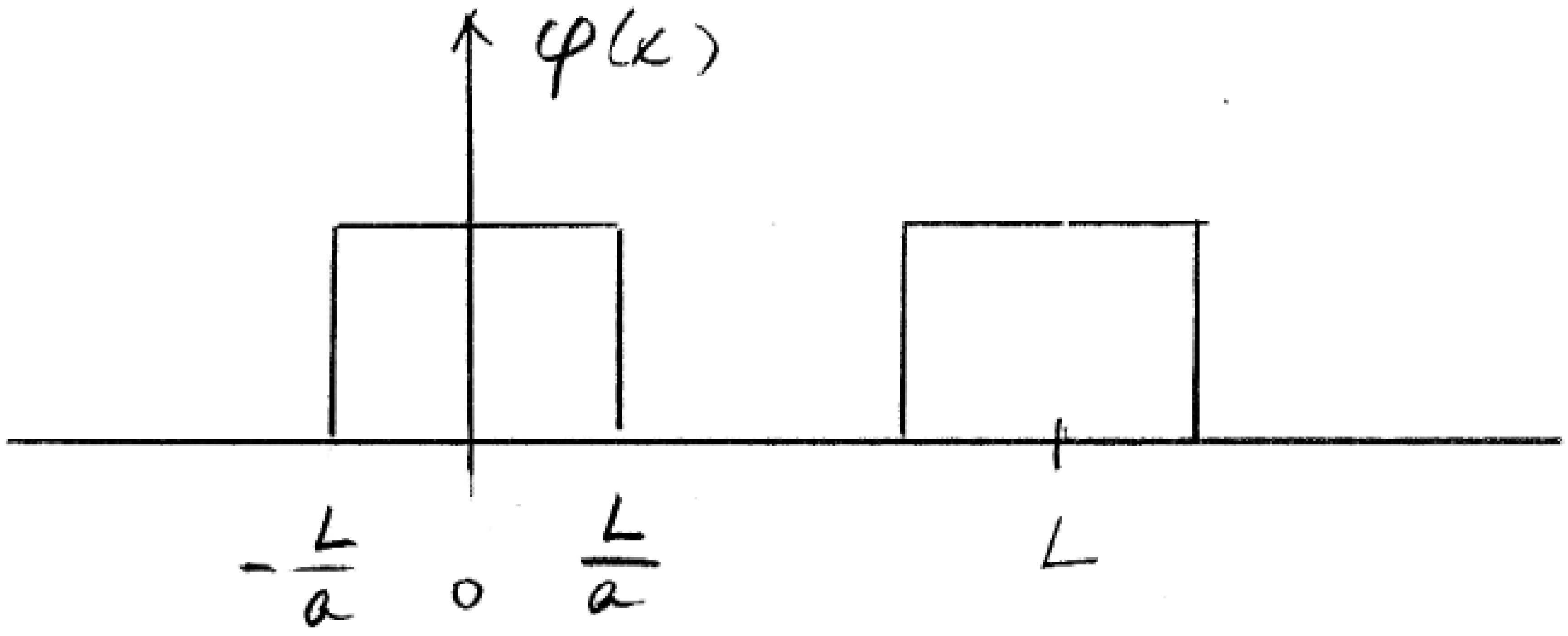
$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad \ldots$$

Folglich gilt mit $K = \frac{2\pi}{L}$

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin K + \frac{1}{3} \sin 3Kx + \frac{1}{5} \sin 5Kx + \ldots \right]$$

→ Figur illustriert die Konvergenz der Fourierreihe gegen die Rechteck-Welle. Beachte, daß $\varphi_{\text{Fourier}}(x) \Big|_{x=0,\, \frac{L}{2},\, \ldots} = 0$ an den Unstetigkeitsstellen von $\varphi(x)$.

(b) Periodische Rechteckpulse mit wachsendem Abstand



Betrachte zunächst den Fall $L = 1\,\text{cm}$ und $a = 4$ (Figur (a)).

$\varphi(x)$ ist gerade $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/a}^{L/a} dx\ 1 \cos(nkx) =$$

$$= \frac{2}{L} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\Big|_0^{L/a}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin\left(2\pi \frac{n}{a}\right)$$

$\underline{a = 4}$ $\qquad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2}{3\pi}, \ \dots$$

$\underline{a = 8}$ $\qquad a_n = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Wähle nun $L = 2\,\text{cm}$, so dass weiterhin die halbe Breite der Rechteckpulse $= \frac{2\,\text{cm}}{8} = \frac{1}{4}\,\text{cm}$ ist. Wir wollen also eine Situation betrachten in der die gleichen Rechteckpulse weiter auseinander liegen.

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \sin\frac{\pi}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad a_4 = 0, \ \dots$$

Die Amplituden a_n der verschiedenen Harmonischen $\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$ haben für alle L die gleiche Einhüllende. Es ändern sich nur der Abstand zwischen den a_n's. Die diskreten Spektrallinien bilden mit wachsendem L allmählich ein Kontinuum

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(k_m x) \quad ; \quad k_m = \frac{2\pi}{L} \cdot m$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\Delta k}{\Delta k} \cos(k_m x)$$

$$\text{mit } \Delta k = \frac{2\pi}{L} \quad , \quad \frac{a_m}{\Delta k} = \frac{a_m \cdot L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\, \overbrace{2\int_0^{\infty} dx\, \varphi(x) \cos(kx)}^{= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)\cos(kx)}$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} dk\, \frac{1}{2\pi}\, a(k) \cos(kx)$$

$$\text{mit } a(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x) \cos(kx)$$

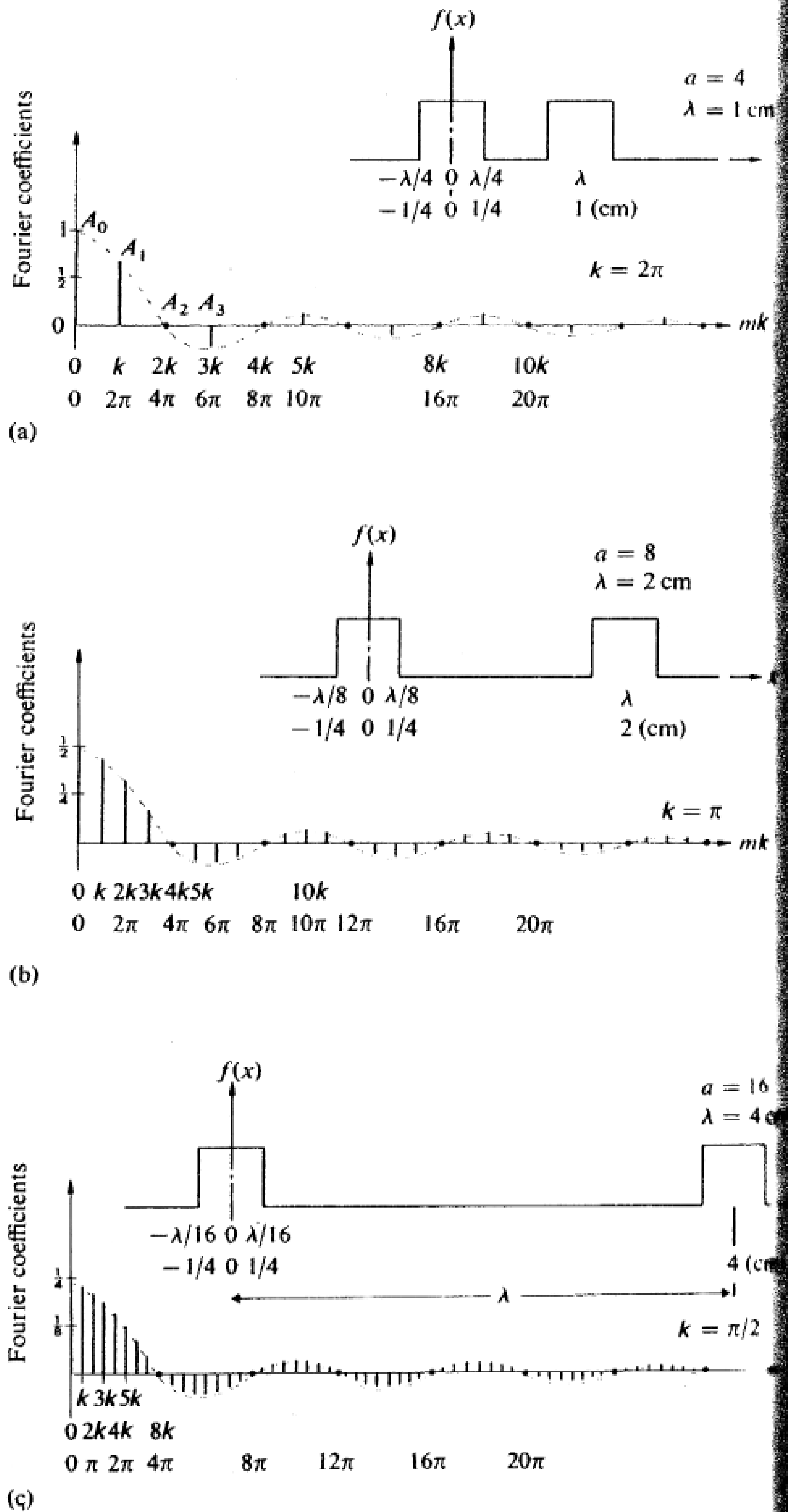


Figure 7.32 The square pulse as a limiting case. The negative co[…] cients correspond to a phase shift of π radians. As more and more […]quency terms are added to the synthesis, the peaks on either side […] the one at the origin move out toward $\pm$infinity, respectively. Ultima[…] when there is a continuous range of component frequencies presen[…] they will combine to produce a single square pulse at the origin.

Aus Hecht, Optik